



Modèles de comportement mécaniques

| Ref: CESAR-MU(MM)-v33-FR

Document rédigé par : Emmanuel Bourgeois (COSYS-LISIS)	Relu et validé par : Philippe Lévêque (COSYS-LISIS)
---	--

Ref: CESAR-LCPCV6-MU-MM33-FR (Université Gustave Eiffel/IFSTTAR-LCPC)
septembre 2020

Table des matières

1. Introduction	11
1.1. Objectifs du document	12
1.2. Quelques notations	12
2. Phénomènes et modèles associés	15
2.1. Généralités sur les comportements élastique et élastoplastique	16
2.2. Résistance au cisaillement et résistance à la compression	18
2.3. Ecouissage	19
2.4. Résistance au cisaillement non drainé	20
2.5. Comportement dans le domaine des petites déformations	20
2.6. Anisotropie	20
2.6.1. Anisotropie des propriétés élastiques	20
2.6.2. Anisotropie des propriétés plastiques	21
2.7. Endommagement	21
2.8. Autres phénomènes	22
2.8.1. Fluage et relaxation, comportements dépendant du temps	22
2.8.2. Vieillessement, corrosion, déformations chimiques, thermiques	22
2.8.3. Grandes déformations	22
3. Eléments de massif en statique	23
3.1. Modèles classiques et modèles à composantes	24
3.2. Modèles élastiques et élastoplastiques « classiques »	24
3.2.1. Elasticité linéaire isotrope (IMOD=1)	24
3.2.2. Elasticité linéaire isotrope transverse (IMOD=2)	25
3.2.3. Elasticité linéaire orthotrope	27
3.2.4. Elasticité avec dilatance isotrope (IMOD=88)	27
3.2.5. Comportement du béton au jeune âge (IMOD=5)	28
3.2.6. Modèle de Mohr Coulomb sans écouissage (IMOD=10)	30
3.2.7. Modèle de Von Mises sans écouissage (IMOD=11)	32
3.2.8. Modèle de von Mises avec écouissage (IMOD=12)	33
3.2.9. Modèle de Drucker Prager sans écouissage (IMOD=13)	34
3.2.10. Modèle de Drucker Prager avec écouissage (IMOD=14)	35

3.2.11. Critère parabolique (IMOD=15)	36
3.2.12. Modèle de Vermeer (IMOD=16)	37
3.2.13. Modèle de Nova (IMOD=17)	39
3.2.14. Modèle Cam-Clay modifié (IMOD=18)	41
3.2.15. Modèle de Prévost et Hoeg (IMOD=19)	43
3.2.16. Critère orienté (IMOD=20)	44
3.2.17. Modèle de Hoek et Brown (IMOD=24)	45
3.2.18. Modèle Mélanie (IMOD=34 en 2D et 35 en 3D)	46
3.2.19. Modèle de Tresca anisotrope (IMOD=40)	48
3.2.20. Matériau renforcé : modèle de de Buhan et Sudret (IMOD=43)	49
3.2.21. Modèle de Willam-Warnke standard, 3 paramètres (IMOD=47)	54
3.2.22. Modèle de Willam-Warnke modifié, 4 paramètres (IMOD=48)	56
3.2.23. Modèle de gonflement de Bultel (1999) (IMOD=98)	57
3.3. Modèles « à composantes »	58
3.3.1. Principe	58
3.3.2. Mise en œuvre dans le jeu de données	58
3.3.3. Modèles élastiques	60
3.3.4. Critères de plasticité, potentiels plastiques, et lois d'érouissage	80
3.3.5. Prise en compte d'inclusions de renforcement par homogénéisation	98
3.3.6. Calculs en condition non drainée	99
3.4. Modèles à plusieurs mécanismes plastiques	101
3.5. Comportement cyclique	101
3.6. Hardening Soil Model (mécanisme frottant seulement)	102
3.6.1. Introduction	102
3.6.2. Partie élastique du modèle (IELAS=5)	102
3.6.3. Critère de plasticité et loi d'érouissage (ICRIT=31 / ECR=1)	102
3.6.4. Mise en œuvre dans CESAR	103
3.6.5. Limites de l'implantation du HSM dans CESAR	103
3.7. Modèles d'endommagement	105
3.7.1. Généralités	105
3.7.2. Utilisation des modèles d'endommagement avec CESAR	106
3.7.3. Modèles d'endommagement isotrope	106
3.7.4. Modèles d'endommagement anisotropes pour la maçonnerie	112
4. Modélisation multiphasique des milieux renforcés	115
4.1. Principe de la modélisation proposée	116
4.2. Modèles de comportement pour la phase matrice	116
4.3. Dispositions géométriques pour la phase renforcement (indicateur IGEOM)	116

4.4. Modèles de comportement pour la phase renforcement (indicateur ICOMP)	116
4.5. Modèles d'interaction entre les phases (indicateur ICINT)	116
4.5.1. Interaction linéaire (ICINT=1)	116
4.5.2. Interaction linéaire parfaitement plastique (ICINT=4)	117
4.5.3. Interaction bilinéaire parfaitement plastique (ICINT=14)	117
4.5.4. Interaction parabolique parfaitement plastique (ICINT=15)	117
5. Eléments de massif en dynamique	119
5.1. Calculs linéaires (module DYNI)	120
5.1.1. Modèles classiques (IMOD=1 et 2)	120
5.1.2. Prise en compte d'un amortissement par groupe (IMOD=66)	120
5.1.3. Modèles élastiques tirés des modèles à composantes	120
5.2. Calculs non linéaires (module MCCI)	120
6. Eléments de massif en couplage hydromécanique ou thermo-hydro-mécanique	121
6.1. Couplage hydromécanique	122
6.2. Couplage thermo-hydro-mécanique	122
7. Eléments d'interfaces	123
7.1. Eléments de contact et éléments de joint	124
7.2. Eléments de contact	124
7.2.1. Rappel sur les éléments de contact	124
7.2.2. Modèles d'interface pour les éléments de contact	127
7.3. Eléments de joint	129
7.3.1. Rappel sur les éléments de joint	129
7.3.2. Modèles d'interface pour les joints	129
7.3.3. Utilisation d'éléments de joint dans les calculs en diffusion	129
8. Eléments de barre	131
8.1. Introduction	132
8.2. Modèles de comportement	132
8.2.1. Comportement élastique linéaire (IMOD=1)	132
8.2.2. Comportement élastique-parfaitement plastique (IMOD=4)	133
8.2.3. Comportement élastique linéaire – fragile (IMOD=5)	133
8.2.4. Comportement élastique linéaire – parfaitement plastique – fragile (IMOD=6)	134
8.2.5. Comportement élastique linéaire – parfaitement plastique avec perte de raideur (IMOD=7)	134
8.2.6. Comportement élastique bilinéaire – parfaitement plastique (IMOD=14)	135
8.2.7. Comportements non disponibles	135
9. Modèles d'interaction barre/massif	137
9.1. Eléments de barre avec frottement	138

9.2. Principe d'utilisation	138
9.3. Modèles d'interaction	138
9.3.1. Interaction linéaire (ICINT=1)	138
9.3.2. Interaction linéaire parfaitement plastique (ICINT=4)	139
9.3.3. Interaction bilinéaire parfaitement plastique (ICINT=14)	139
9.3.4. Interaction parabolique parfaitement plastique (ICINT=15)	140
9.3.5. Modèles d'interaction bilinéaire parfaitement plastique Newton-I et Newton-II (ICINT=16 et ICINT=17)	140
9.3.6. Comportements non disponibles	143
10. Eléments de poutre	145
10.1. Poutres classiques	146
10.1.1. Elasticité linéaire (IMOD=1, 12, 13, 14, 15, 16, 101, 113, 114, 115 ou 116)	146
10.1.2. Elasticité linéaire avec fluage (IMOD=2)	147
10.2. Poutres multifibres (IMOD=5) - en 3D uniquement	148
11. Eléments de coque	149
11.1. Coques classiques (IMOD=1)	150
11.2. Coques multicouches (IMOD=2)	150
12. Recommandations pour le choix d'un modèle de comportement pour quelques ouvrages types	151
12.1. Fondations superficielles	152
12.2. Fondations profondes	152
12.3. Stabilité d'un talus	152
12.4. Dimensionnement du revêtement d'un tunnel	152
12.5. Tassements provoqués par le creusement d'un tunnel peu profond	152
12.6. Ecran de soutènement	152
13. Exemples de mise en œuvre / éléments de validation	154
13.1. Elasticité isotrope transverse (IMOD=2 / IELAS=2)	155
13.2. Elasticité linéaire isotrope avec modules variables avec la profondeur	156
13.3. Apport des modèles élastiques non linéaires	160
13.3.1. Elasticité type Cam-Clay	160
13.3.2. élasticité type Fahey et Carter	161
13.4. Calcul en condition non drainée	163
13.5. Critères de plasticité anisotropes	164
13.6. Comportement cyclique : modèles d'écrouissage cinématique non linéaire	165
13.7. Simulations avec deux mécanismes plastiques	167
13.7.1. Modèle avec « cap » en compression	167
13.7.2. Modèle de massif rocheux fracturé	168

14. RÉFÉRENCES	169
15. ANNEXES	172
15.1. Critères de plasticité anisotropes : orientation des axes liés au matériau	173
15.2. Modèle élastoplastique anisotrope à deux types d'écroissage : S-CLAY1	177
15.3. Critère de Von Mises et écroissage cinématique non linéaire de Prager	179
15.4. Critères dépendant du troisième invariant du tenseur des contraintes	180
15.4.1. Définition des invariants et calcul de leurs dérivées	180
15.4.2. Critère du modèle HISS	180
15.5. Note sur la programmation des modèles à élasticité anisotrope	181
15.5.1. Calcul en déformations planes	182
15.5.2. Calcul en condition tridimensionnelle	183
15.6. Formulation des lois d'écroissage pour les géomatériaux	185
15.6.1. Formulation en variables triaxiales	185
15.6.2. Introduction de la déformation déviatorique dans la loi d'écroissage	186
15.6.3. Première tentative d'extension au cas tridimensionnel	187
15.6.4. Autres choix des variables de la loi d'écroissage	188
15.6.5. Conclusion	189

1. Introduction

1.1. Objectifs du document

Le choix d'une loi de comportement adaptée à l'ouvrage étudié et aux sollicitations qu'on lui impose a une influence déterminante sur la représentativité du calcul et des résultats qu'il produit.

Au cours des années 1970-1980, le développement de nouveaux modèles de comportement pour les géomatériaux a connu un grand essor, et de nombreux modèles ont été proposés dans la littérature, qu'il est difficile de présenter de manière simple et exhaustive. Néanmoins, certains de ces modèles proposent des mécanismes de déformation qu'il peut être intéressant de mettre en jeu dans une situation particulière ; il est donc utile de comprendre quels aspects du comportement réel des matériaux un modèle donné peut ou non représenter.

Un autre aspect important du choix d'un modèle réside dans le nombre de paramètres qu'il fait intervenir, et surtout dans les moyens de déterminer leur valeur à partir des essais couramment disponibles dans le cadre d'un projet réel.

L'objet de ce document est de proposer une présentation des lois de comportement disponibles dans les modules de mécanique en statique de CESAR, MCNL et TCNL. Il mentionne également les modèles utilisables :

- pour le béton au jeune âge avec le module MEXO,
- pour les calculs en dynamique,
- dans le cadre de calculs couplés (CSNL et MPNL).

Le but principal est de rappeler la formulation mathématique exacte des modèles de comportement disponibles dans le solveur CESAR pour les problèmes mécaniques bidimensionnels et tridimensionnels, et la liste des paramètres à fournir pour utiliser ces modèles.

On espère que ce document pourra aussi guider l'utilisateur dans le choix d'un modèle ou d'un autre, en fonction du problème qu'il a à traiter.

Ce document reprend en partie le contenu de documents antérieurs, notamment (mais pas uniquement) :

- le guide technique GT n°52 de la série Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées (Mestat, 1993),
- l'abrégé théorique de la version 5,
- la documentation des lois de comportement « à composantes ».

1.2. Quelques notations

La formulation de nombreux modèles de comportement fait appel à la définition d'un certain nombre de grandeurs, comme les invariants du tenseur des contraintes par exemple. On définit dans cette section les notations les plus utiles pour la suite. On adopte ici la convention de signe de la mécanique des milieux continus, c'est-à-dire que les contraintes sont comptées positivement en traction. On récapitule ici les notations les plus courantes.

Contraintes

On désigne par σ_1 , σ_2 , σ_3 les contraintes principales (c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur de contraintes dans l'espace à trois dimensions), supposées ordonnées :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Pour la formulation de certains critères usuels en mécanique des sols et des roches, il sera utile d'introduire aussi les notations Σ_1 et Σ_3 pour représenter respectivement la plus grande et la plus petite contrainte de compression en valeur absolue. Pour un état de contraintes dans lequel les trois contraintes principales correspondent à des compressions, on a simplement :

$$\Sigma_1 = -\sigma_3 > \Sigma_3 = -\sigma_1 > 0.$$

La contrainte moyenne est définie par :

$$p = -\frac{\text{tr}(\sigma)}{3}$$

Le déviateur du tenseur des contraintes σ , est le tenseur, noté s , défini par :

$$s = \sigma + p \mathbf{1} \quad (\text{ou encore, en composantes : } s_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij})$$

On introduit parfois les invariants du tenseur des contraintes I_1, I_2, I_3, J_2 et J_3 définis par :

$$I_1 = \text{tr}(\sigma) = -3p$$

$$I_2 = J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$$

$$I_3 = \det(s_{ij}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

Il est habituel en mécanique des sols d'utiliser à la place du deuxième invariant J_2 le déviateur (scalaire) q défini par :

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3 J_2}$$

Pour les critères de plasticité qui dépendent du troisième invariant, il est courant d'utiliser, à la place de I_3 ou J_3 l'angle de Lode θ défini par :

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^{3/2}}\right)$$

Déformations

On rencontre parfois le déviateur du tenseur des déformations, défini par :

$$\varepsilon_d = \varepsilon - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon) \mathbf{1}$$

On utilise également dans certains modèles de mécanique des sols un déviateur scalaire des déformations, défini dans le contexte de l'essai triaxial ($\Sigma_2 = \Sigma_3$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$) par :

$$\varepsilon_d = \frac{2}{3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

et dans un contexte tridimensionnel par :

$$\varepsilon_d = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_d)_{ij} (\varepsilon_d)_{ij}}$$

Par ailleurs, la déformation volumique, notée ε_v , est égale à la trace du tenseur de déformation ε .

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Contraintes totales et contraintes effectives

La plupart des modèles de mécanique reposent sur le principe des contraintes effectives de Terzaghi, qui stipule que les déformations sont contrôlées par les variations des contraintes effectives plutôt que celles des contraintes totales. Avec la convention de signe des milieux continus adoptées ici, le tenseur de contraintes effectives, noté σ' , est défini par :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + u\delta_{ijc}$$

Où u désigne la pression du fluide dans les pores.

Dans le module MCNL, on suppose en général implicitement que l'on travaille en contraintes effectives (ce qui doit être pris en compte lors de l'initialisation des contraintes), et le comportement calculé est un comportement drainé (à long terme). On peut cependant aussi faire un calcul en contraintes totales. On peut aussi faire un calcul en condition non drainée, en utilisant une procédure ad hoc, décrite dans le cadre des modèles à composantes ci-après.

NB. Dans certains contextes, en mécanique des roches notamment, il est courant de définir les contraintes effectives par :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + b u \delta_{ij}$$

où le coefficient scalaire b affectant la pression peut être différent de 1 si la variation de volume des grains solides constituant le squelette milieu étudié n'est pas négligeable devant celle de l'eau. La prise en compte d'une valeur différente de 1 pour ce coefficient n'est possible dans CESAR que dans le module MPNL.

2. Phénomènes et modèles associés

2.1. Généralités sur les comportements élastique et élastoplastique

Un modèle de comportement est un ensemble d'équations qui représente la relation entre les contraintes subies par le matériau, généralement notées σ , et les déformations qui en résultent, souvent notées ε dans le cadre des petites perturbations (qui suppose en particulier que les déformations restent petites).

Le modèle de comportement est une relation locale, au niveau du « point matériel » de la modélisation macroscopique, entre contraintes et déformations. Selon l'échelle à laquelle on se place, le comportement d'un même matériau ne sera donc pas nécessairement représenté par le(s) même(s) modèle(s).

D'autre part, il s'agit d'une représentation mathématique qui doit rendre compte au mieux des phénomènes physiques responsables de la déformation (les dislocations dans un milieu cristallin, la réduction de porosité dans certains géomatériaux, la perte de raideur des bétons liée à leur fissuration, etc.). Un même phénomène, dans des contextes différents, peut être représenté par des modèles différents. On peut aussi penser que certains phénomènes peuvent difficilement ou pas du tout être pris en compte avec un modèle inapproprié. On essaiera dans la suite de présenter les grandes familles de modèles associées à tel ou tel type de phénomènes.

De manière tout à fait générale, le comportement d'un matériau peut dépendre d'une multitude de facteurs, du temps, de la vitesse à laquelle on le sollicite, de l'histoire des déformations et des contraintes qu'il a subies... Une formulation entièrement générale est donc inutilisable en pratique, et on est amené à simplifier le comportement réel pour parvenir à une formulation qui puisse être mise en œuvre pour les applications que l'on vise. Le modèle de comportement n'est donc qu'une représentation mathématique simplifiée de la réalité, qui peut être plus ou moins fidèle ; en ce sens, il est préférable de parler de modèle de comportement plutôt que de « loi » de comportement.

Pour le milieu continu tridimensionnel, le comportement le plus simple est le comportement élastique linéaire. Dans ce cas, les contraintes sont directement proportionnelles aux déformations :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

où C_{ijkl} représente les composantes du tenseur des modules d'élasticité C , supposés constants dans le cas de l'élasticité linéaire. Compte tenu des symétries du tenseur des modules d'élasticité, l'élasticité linéaire est caractérisée par 21 coefficients indépendants.

On fait très souvent l'hypothèse, bien qu'elle ne soit que rarement justifiable en géotechnique, que le comportement du matériau est isotrope, c'est-à-dire que les propriétés de déformabilité du matériau sont identiques dans toutes les directions. Dans le cas de l'élasticité linéaire, on montre que le tenseur d'élasticité C n'est caractérisé que par deux paramètres scalaires indépendants, le module de Young et le coefficient de Poisson.

Indépendamment de son caractère isotrope ou non, le comportement élastique linéaire est réversible : si l'on ramène les contraintes à zéro, on efface aussi la déformation. D'autre part, il n'y a pas de limite à la valeur des contraintes que l'on peut appliquer au matériau : sa résistance est donc infinie (on notera que si les contraintes deviennent arbitrairement grandes, on finira par sortir du domaine des petites déformations, et il faudrait donc adopter une formulation du comportement appropriée).

Par ailleurs, le comportement élastique n'est pas nécessairement linéaire. Dans le cas élastique non linéaire, on écrira

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e$$

où les coefficients C_{ijkl} sont les modules d'élasticité tangents, qui ne sont plus constants mais dépendent des déformations ou des contraintes (selon les modèles).

Le comportement d'un certain nombre de matériaux sort du cadre réversible : dans les géomatériaux, en particulier, il est clair que certaines déformations ne disparaissent pas lorsqu'on décharge le matériau. D'autre part, l'expérience courante indique que la charge que l'on peut appliquer à une structure n'est pas

infinie, et des expériences simples montrent qu'il y a donc une limite aux contraintes que le matériau peut supporter. Le cadre élastoplastique fournit un moyen de décrire ces deux réalités. On distingue, dans la déformation du matériau, une contribution « élastique » (réversible), notée ε^e , qui revient à zéro si l'on efface les contraintes appliquées au matériau, et une contribution « plastique », notée ε^p , qui est irréversible ou permanente, au sens où elle subsiste une fois que les contraintes appliquées ont disparu :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

Dans le cadre de l'élastoplasticité, les déformations élastiques sont reliées aux contraintes par la relation

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)$$

Il reste à préciser :

- dans quelles conditions la partie plastique du tenseur de déformation évolue,
- et comment on peut relier ses évolutions au chargement subi par le matériau.

On caractérise les situations dans lesquelles les déformations plastiques sont susceptibles d'évoluer en introduisant une fonction scalaire de l'état de contraintes $f(\sigma)$, appelée critère de plasticité (ou fonction de charge), telle que :

- si $f(\sigma) < 0$: les déformations sont réversibles et la partie plastique des déformations n'évolue pas
- si $f(\sigma) = 0$: la partie plastique des déformations peut évoluer.

La condition $f(\sigma) < 0$ délimite un domaine dans l'espace des contraintes à l'intérieur duquel on reste dans le régime des déformations réversibles. On ne peut pas sortir de ce domaine, mais si l'on se trouve sur sa frontière, des déformations plastiques sont susceptibles de se produire. On appelle souvent « surface de charge » la frontière du domaine où $f \leq 0$. L'expression mathématique de la fonction servant de critère et les paramètres qu'elle met en jeu dépendent du matériau, et doit être identifiée sur la base d'essais expérimentaux et d'hypothèses mathématiques (par exemple, si l'on suppose que le matériau est isotrope, la valeur de la fonction f ne dépend que des invariants du tenseur de contraintes).

Lorsque l'état de contrainte atteint la surface de charge, les déformations plastiques sont susceptibles d'évoluer. On décrit leur variation par la relation suivante, dite « loi d'écoulement plastique » :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

où $g(\sigma)$ est une nouvelle fonction du tenseur des contraintes, appelée « potentiel plastique », dont la dérivée par rapport à σ donne la direction de l'incrément des déformations plastiques, leur intensité étant gouvernée par le paramètre scalaire $d\lambda$, appelé multiplicateur plastique, et contraint à être positif ou nul.

Si le potentiel plastique coïncide avec la fonction de charge, la règle d'écoulement est dite « associée ». En géotechnique, on constate souvent que ce modèle est insuffisant. Il faut donc introduire pour décrire les déformations plastiques une fonction g différente de la fonction de charge, qui doit également être identifiée à partir d'essais de laboratoire.

On parvient à fermer le problème, du point de vue mathématique, en écrivant la condition de cohérence, qui exprime que l'on ne peut pas sortir de la surface de charge. Si les déformations plastiques incrémentales $d\varepsilon^p$ sont non nulles, la valeur de la fonction f doit rester nulle, ce qu'on peut écrire :

$$d\lambda df = 0$$

Le comportement élastoplastique permet de rendre compte de l'apparition de déformations irréversibles et du fait que la résistance locale du matériau étudié n'est pas infinie. Ce comportement reste cependant relativement simple : en particulier, il ne fait pas intervenir explicitement le temps. La vitesse à laquelle on applique un chargement mécanique n'a donc pas d'influence sur les déformations. Pour certains matériaux (polymères, bitume) cette hypothèse n'est pas réaliste. D'autre part, dans le formalisme de l'élastoplasticité, le point représentatif de l'état de contraintes σ_{ij} ne peut pas sortir du domaine élastique. Dans le formalisme de la viscoplasticité, en revanche, l'état de contraintes peut sortir du domaine élastique, mais le module MCNL ne permet pas de prendre en compte ce type de comportement.

Note : Les expressions ci-dessus supposent la fonction de charge et le potentiel suffisamment réguliers pour qu'on puisse calculer leurs dérivées : ce n'est pas toujours le cas, même pour des critères

courants (comme le modèle de Mohr-Coulomb par exemple). La formulation de ces modèles et leur traitement numérique demande des précautions particulières.

Comportement élastoplastique parfait et écrouissable

De nombreuses constatations expérimentales montrent que le domaine élastique peut évoluer lors des transformations subies par un matériau. On est donc amené, dans la modélisation, à introduire dans l'expression du critère un ou plusieurs paramètres « d'écrouissage » qui contrôlent la taille et la forme du domaine élastique, et dont la modélisation doit décrire l'évolution.

Il n'entre pas dans le cadre de ce document de discuter l'interprétation physique du phénomène d'écrouissage, mais on peut signaler que différentes théories ont été proposées pour distinguer dans la puissance mécanique fournie au matériau et non restituable une fraction dissipée sous forme de chaleur et une fraction impliquée dans la transformation du matériau manifestée par l'écrouissage.

En pratique, on caractérise donc le critère par une expression de la forme $f(\sigma, \zeta)$, où ζ n'est pas une constante mais est susceptible de varier, d'une façon qu'il convient alors de préciser. Une façon d'obtenir un problème bien posé sur le plan mathématique consiste à décrire les variations de ζ en les reliant à un paramètre caractéristique de l'évolution du matériau. Il peut s'agir par exemple d'une loi reliant le paramètre d'écrouissage à la déformation plastique, du type :

$$\zeta = F(\varepsilon^p) \quad \text{ou} \quad \dot{\zeta} = A(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

C'est le cas des modèles de type Cam-Clay par exemple. La loi d'écrouissage peut aussi relier $\dot{\zeta}$ au travail plastique :

$$\dot{\zeta} = B(\sigma_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

On détermine alors la valeur du multiplicateur plastique à l'aide de la condition de cohérence, qui s'écrit, en tenant compte du fait que le paramètre d'écrouissage varie :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \dot{\zeta} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\lambda} > 0$$

Modèles à plusieurs mécanismes

On trouve dans la littérature des modèles plus complexes que ceux décrits par le formalisme ci-dessus, dans lesquels le domaine élastique est défini par deux critères f_1 et f_2 (ou plus) : le point de charge est à l'intérieur du domaine élastique si $f_1(\sigma_{ij}) < 0$ et $f_2(\sigma_{ij}) < 0$.

Chacune des surfaces de charge associées aux deux critères peut être fixe ou écrouissable. Le calcul des déformations plastiques peut mettre en jeu, pour ces modèles, deux multiplicateurs plastiques indépendants, et la vitesse de déformation plastique est une combinaison linéaire des normales aux deux critères. On détermine les multiplicateurs plastiques en écrivant une condition de cohérence pour chacun des critères.

2.2. Résistance au cisaillement et résistance à la compression

La présentation donnée ci-dessus est assez mathématique, mais elle repose sur des constatations expérimentales : il existe un seuil, dans l'espace des contraintes, au-delà duquel les déformations cessent d'être réversibles.

La première étape pratique pour formuler un comportement élastoplastique consiste à identifier ce seuil, c'est-à-dire les états de contraintes susceptibles d'amener la rupture du matériau.

Expérimentalement, on peut mettre en évidence l'atteinte de ce seuil dans certaines situations. A la fin du XIXe et au début du XXe siècle, Tresca et von Mises ont observé que les matériaux supportent mal les états de contraintes dans lesquels certaines facettes matérielles sont soumises à une contrainte tangentielle élevée, ou, ce qui revient au même, les états de contraintes dans lesquels les contraintes principales sont très éloignées. Autrement dit, les matériaux sont sensibles à la composante déviatorique du tenseur des contraintes, ou à la valeur de la plus grande contrainte de cisson.

Pour les deux critères proposés par Tresca et von Mises, la valeur de la fonction de charge ne dépend pas de la valeur de la contrainte moyenne.

Cette particularité représente assez bien la résistance des matériaux métalliques, ou des argiles. On peut cependant se convaincre facilement, expérimentalement, que ces modèles ne sont pas bien adaptés pour décrire la résistance de matériaux comme les sables, qui peuvent supporter une contrainte déviatorique plus importante lorsque la contrainte moyenne augmente. Pour tenir compte de ce constat, on peut adopter des critères plus complexes, comme le critère de Mohr Coulomb ou de Drucker Prager, qui permettent de rendre compte du constat que le déviateur maximal, au cours d'un essai triaxial de compression par exemple, est plus important si la contrainte de confinement de l'échantillon augmente.

De même que l'on peut mettre en évidence expérimentalement l'existence d'une valeur maximale de la contrainte tangentielle qu'une facette matérielle peut supporter, on peut également montrer que certains matériaux présentent un comportement irréversible lorsqu'on les soumet à une compression trop forte (par exemple, les sédiments subissent une réduction de porosité irréversible lors de la formation des bassins sédimentaires). On peut mettre en évidence cette influence de la contrainte moyenne dans un oedomètre ou au cours d'un essai de compression isotrope.

On comprend que les modèles (c'est-à-dire, dans le cadre élastoplastique, les fonctions de charge) qui représentent ces propriétés mécaniques sont différents. Pour un matériau isotrope, dans le cas de la résistance au cisaillement, c'est la distance entre le point représentatif de l'état de contraintes et l'axe des compressions isotropes dans l'espace des contraintes principales qui va gouverner l'apparition de déformations plastiques. Dans le cas de la résistance à la compression, c'est plutôt la position de projection de l'état de contraintes sur l'axe des compressions isotropes qui pourra servir de base à la construction d'un critère. En tout état de cause, la formulation mathématique de la fonction de charge vise à rendre compte d'un phénomène que l'on peut mesurer expérimentalement.

2.3. Ecrouissage

Dans le cas d'un matériau parfaitement plastique, l'état de contraintes ne peut pas sortir de la surface de charge initiale, parce que le domaine élastique n'évolue pas.

On peut envisager des modèles écrouissables, dans lesquels la surface est susceptible d'évoluer. Une famille de modèles simples consiste à prendre en compte un écrouissage « isotrope » au sens où la surface de charge évolue en subissant une homothétie dans l'espace des contraintes. En général, cette évolution correspond à une augmentation de la taille du domaine élastique (écrouissage positif).

En mécanique des sols, cette évolution est le plus souvent bornée et la surface de charge évolue jusqu'à une surface limite, qu'on appellera surface de rupture.

On peut imaginer des modèles d'écrouissage « cinématique », dans lesquels la surface de charge subit une translation sans se déformer dans l'espace des contraintes. Ces modèles permettent de rendre compte de phénomènes observés dans les métaux (effet Bauschinger).

D'autre part, dans certains modèles, la taille du domaine élastique diminue au cours de la déformation plastique. On parle d'écrouissage négatif (ou de radoucissement). Ce type de modèle pose des problèmes théoriques, parce que la solution du problème cesse d'être unique. Sur le plan numérique, on observe généralement une forte dépendance de la solution obtenue par éléments finis avec la taille des éléments

du maillage ; on peut faire apparaître dans le maillage des « bandes de cisaillement » où de fortes déformations se localisent, et on peut discuter de la représentativité de la solution trouvée.

2.4. Résistance au cisaillement non drainé

Un aspect important du comportement des sols est le rôle de l'eau contenue dans le sol sur sa déformabilité. Un certain nombre d'essais de laboratoire (en particulier à l'appareil triaxial) sont effectués en condition non drainée. Sous réserve que l'on puisse mesurer la pression de l'eau dans l'échantillon au cours de l'essai, ce type d'expériences permet d'obtenir des informations utiles pour la caractérisation de la surface de charge initiale.

La modélisation du comportement des sols en condition non drainée pose des difficultés spécifiques : en particulier, certains modèles de comportement prévoient une résistance au cisaillement non drainée infinie. C'est ce qui a motivé le développement des modèles d'état critique (comme le modèle Cam-Clay). L'utilisation de calculs non drainés doit donc être conduite par un utilisateur averti de ces difficultés théoriques.

2.5. Comportement dans le domaine des petites déformations

Dans le cas des ouvrages géotechniques, une grande partie du massif n'atteint pas la rupture, ni le critère de plasticité. La réponse globale du massif, qui intègre les déformations de toutes les parties du sol, n'est donc pas toujours bien représentée si le modèle que l'on utilise pour représenter le comportement des zones soumises à de petites déformations n'est pas adapté. Un certain nombre de modèles élastiques non linéaires ont été proposés pour prendre en compte de manière précise la réponse des sols sous faibles déformations.

2.6. Anisotropie

De manière générale, un matériau isotrope est un matériau dont la réponse ne dépend pas de l'orientation des sollicitations qu'il subit. L'anisotropie d'un matériau peut être la conséquence de sa structure (schistosité, composite constitué d'une matrice et de fibres orientées dans une direction préférentielle) et/ou de l'histoire des sollicitations qu'il a subies.

Une prise en compte complète de l'anisotropie des propriétés matérielles pose des problèmes théoriques difficiles (en particulier, la notion d'isotropie est relative à une configuration donnée).

On se contente de rappeler ici les approches les plus courantes pour prendre en compte l'anisotropie du comportement du matériau dans le domaine élastique et dans le domaine plastique.

Dans tous les cas, si le comportement du matériau n'est pas le même dans toutes les directions de l'espace, il faut définir un repère de « directions matérielles », qui permettent de prendre en compte l'orientation du chargement par rapport au matériau.

2.6.1. Anisotropie des propriétés élastiques

Dans le cas isotrope linéaire, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont reliés par une loi faisant intervenir deux paramètres matériaux, le module d'Young et le coefficient de Poisson (ou les deux coefficients de Lamé, ou le module de compression K et le module de cisaillement G selon les formulations). Les deux tenseurs ont les mêmes directions principales.

Le cas anisotrope le plus simple correspond au cas de l'isotropie transverse. Cette situation peut rendre compte par exemple de l'effet de la consolidation de sédiments, dans lesquels la direction verticale joue un rôle particulier, qui peut se traduire par une raideur différente dans les directions verticales et horizontales.

Le comportement est alors caractérisé par 5 coefficients indépendants.

L'autre comportement anisotrope que l'on peut rencontrer correspond au comportement orthotrope. Le matériau présente des symétries matérielles par rapport à trois plans orthogonaux. Le comportement est caractérisé par neuf coefficients indépendants.

Ce type de symétrie correspond plutôt à des matériaux artificiels, comme des matériaux composites, pour lesquels on peut imaginer de déterminer les paramètres du modèle à partir de considérations théoriques d'homogénéisation (et/ou de calculs numériques auxiliaires).

Bien qu'on puisse imaginer des modèles dans lesquels les directions d'anisotropie des propriétés élastiques dépendent de l'histoire de chargement, CESAR propose seulement des modèles anisotropes dans lesquels ces directions, pour un point donné, sont fixes (elles peuvent cependant dans certains cas particuliers varier d'un point à l'autre).

2.6.2. Anisotropie des propriétés plastiques

Anisotropie structurelle – anisotropie induite

Dans un mur en maçonnerie, l'appareillage des briques définit des directions particulières et se traduit par un comportement macroscopique anisotrope. Les directions d'anisotropie reflètent la structure du matériau, et n'évoluent pas au cours du temps.

Dans un matériau comme un acier laminé, l'anisotropie des propriétés mécaniques résulte du procédé d'obtention de la plaque d'acier. Les directions d'anisotropie sont fixes et n'évoluent en général plus en conditions normales d'utilisation de l'acier.

Dans ces deux cas, l'orientation du trièdre des directions matérielles est définie une fois pour toutes (en un point donné) : on parle d'anisotropie structurelle.

On peut imaginer des modèles dans lesquels le chargement appliqué au matériau fait apparaître une anisotropie (par rapport à la configuration actuelle) : l'orientation des directions matérielles varie sous l'effet des charges appliquées. Une famille de modèles qui produit ce genre d'effets est obtenue en utilisant un écrouissage cinématique. Pour les argiles, différents auteurs ont proposé des formulations particulières un peu plus complexes. On parle dans ce cas d'anisotropie induite (par le chargement). Ce type de modèles reste peu répandu et difficile à utiliser, l'identification des paramètres étant en général ardue.

2.7. Endommagement

On observe que la raideur de certains matériaux (leur module d'Young dans le cas isotrope) diminue lorsque la déformation qu'ils subissent dépasse un certain seuil. C'est le cas par exemple des bétons, dans lesquels se développe une fissuration lors de la déformation. D'autre part, dans ce type de matériaux, on observe généralement l'existence d'une contrainte maximale que le matériau peut supporter. Bien que les modèles soient différents, on aboutit, comme dans le cas de l'écrouissage négatif, à une perte de l'unicité de la solution et à une forte dépendance de la solution obtenue par éléments finis à la taille des éléments du maillage.

Il existe une grande variété de modèles d'endommagement. De manière générale, la démarche est comparable à celle de l'élastoplasticité : on définit un critère permettant de déterminer à quel moment les modules élastiques commencent à se dégrader : il s'agit généralement d'un seuil sur les déformations subies par le matériau ; on définit ensuite une loi qui décrit cette dégradation.

Dans le cas le plus simple de l'endommagement isotrope, le tenseur des modules d'élasticité du matériau endommagé est égal à sa valeur initiale multipliée par un coefficient scalaire inférieur à 1, noté $1-d$, où d est la variable d'endommagement. Le modèle doit préciser comment cette variable évolue lorsque le seuil d'endommagement est atteint.

2.8. Autres phénomènes

Cette section évoque différents autres phénomènes pour lesquels CESAR-LCPC ne propose que quelques solutions partielles ou indirectes.

2.8.1. Fluage et relaxation, comportements dépendant du temps

Le fluage est un comportement différé de certains matériaux, dans lesquels les déformations peuvent évoluer sous une contrainte constante. Ce type de comportement sort donc du cadre de l'élasticité ou de l'élastoplasticité, qui sont des comportements « instantanés ».

La relaxation correspond à la situation dans laquelle les contraintes dans une pièce soumise à une déformation donnée diminuent au cours du temps (perte de précontrainte par relaxation des armatures).

Selon que les déformations différées sont réversibles ou non, ces deux types de comportement peuvent être représenté par des modèles assez différents (viscoélastiques ou viscoplastiques).

Ce type de comportement n'est pratiquement pas pris en compte dans CESAR, même si on peut, dans certains cas, représenter une diminution du module élastique d'un matériau à l'aide de l'option de chargement EFD (voir la documentation spécifique de cette option).

2.8.2. Vieillessement, corrosion, déformations chimiques, thermiques

On ne s'est pas intéressé jusqu'à présent aux situations dans lesquelles le comportement du matériau varie au cours du temps, parce que le matériau vieillit. Ce type de variation peut être le résultat d'effets chimiques par exemple. On peut en particulier penser au béton, dont le module évolue au cours du temps après le coulage. On peut également mentionner le cas de la corrosion des matériaux métalliques. Ces aspects bien particuliers ne sont pas abordés dans ce manuel.

Pour le béton, des modélisations précises du comportement au jeune âge du matériau, et des réactions internes susceptibles de conduire à sa dégradation, sont disponibles dans des modules dédiés (TEXO, MEXO, RGIB).

On peut aussi mentionner qu'une approche spécifique de la corrosion des armatures des murs en terre armée a été conduite récemment avec CESAR (Chau, 2010).

2.8.3. Grandes déformations

On ne traite pas dans ce document des grandes déformations susceptibles de se produire, en général dans des géomatériaux (les structures étant en principe conçues pour ne pas subir de telles déformations).

3. Éléments de massif en statique

3.1. Modèles classiques et modèles à composantes

Dans le module de calcul en plasticité MCNL, chaque modèle de comportement était constitué, à l'origine, par la combinaison d'une loi élastique (généralement isotrope linéaire et homogène), d'un critère de plasticité, d'un potentiel plastique, et dans quelques cas d'une loi d'écroutissage. Dans cette approche, qualifiée dans la suite de « classique », ces éléments définissent une combinaison associée à une valeur donnée de l'indicateur IMOD (voir le manuel de référence du solveur, pour ce qui concerne le module ELEM). Par exemple, le « modèle de Mohr-Coulomb » (avec une élasticité linéaire isotrope et sans écroutissage), correspond à la valeur IMOD=10. On représente ainsi de manière synthétique, avec un seul indicateur, le modèle de comportement que l'on souhaite représenter (ce souci de rassembler les données associées à un groupe d'éléments conduit également à donner la masse volumique d'un matériau en même temps que les paramètres du modèle de comportement, bien que ces informations n'interviennent pas au même niveau dans les calculs).

Par la suite, on a souhaité donner à l'utilisateur la possibilité de choisir une loi élastique (linéaire ou non, isotrope ou non, avec des paramètres homogènes ou non) indépendamment du critère de plasticité, et de pouvoir comparer les différences entre plusieurs lois d'écroutissage pour un même critère, de combiner deux mécanismes plastiques, de faire des calculs en condition drainée ou non drainée, etc. La multiplicité des combinaisons envisageables rendait alors difficile d'associer un seul indicateur entier à chacune de ces combinaisons, ce qui a conduit à une deuxième représentation des lois de comportement utilisables dans CESAR, appelée « modèles de comportement à composantes ». Dans ce contexte, on décompose la loi de comportement en plusieurs sous-indicateurs distincts.

Cette distinction est liée à la présentation des données dans CESAR, et deux modèles ayant la même formulation mathématique peuvent être mis en œuvre dans l'un ou l'autre des cadres. Cependant, par commodité, la suite du texte est organisée en fonction des deux types de présentation des données.

3.2. Modèles élastiques et élastoplastiques « classiques »

Dans la grande majorité des modèles de comportement « classiques » proposés à l'utilisateur du module MCNL de CESAR-LCPC, la loi élastique est représentée par une relation linéaire et isotrope entre les contraintes et les déformations élastiques (avec des modules indépendants du point considéré), si bien que le tenseur C est constant et caractérisé par deux scalaires, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

Quelques modèles de comportement sortent de ce cadre : par exemple le modèle élastique isotrope transverse IMOD=2 et le modèle d'élasticité avec dilatance isotrope IMOD=88.

3.2.1. Elasticité linéaire isotrope (IMOD=1)

Le cas de l'élasticité linéaire correspond à la situation dans laquelle les variations du tenseur des déformations sont proportionnelles à celles du tenseur des contraintes. La simplicité de ce modèle fait qu'il est encore très souvent utilisé pour analyser le comportement des massifs de sols et des ouvrages. Le comportement est isotrope si, de plus, toutes les directions de l'espace sont équivalentes.

Sur le plan mathématique, deux formulations sont utilisées couramment pour représenter le comportement élastique linéaire isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \qquad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

ou encore, en notations intrinsèques :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1} \qquad \sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2 \mu \varepsilon$$

où E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, λ et μ les coefficients de Lamé. E , λ et μ sont homogènes à une contrainte (ils s'expriment donc en Pa), tandis que ν est sans dimension. Par ailleurs, il existe les relations suivantes entre les couples (E, ν) et (λ, μ) :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Dans les pays anglo-saxons, il est habituel d'utiliser deux autres coefficients G et K et de formuler le comportement de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^d$$

où ε^d est la partie déviatorique du tenseur des déformations. On a alors en particulier :

$$s_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}^d \quad p = -3K \varepsilon_{kk}$$

Il est facile de montrer que le module de cisaillement G est égal à μ , et que le module de compression K vérifie : $3K=3\lambda+2\mu$.

Pour l'élasticité isotrope, dans CESAR, l'utilisateur doit fournir E et ν .

Paramètres du modèle élastique linéaire isotrope (IMOD=1)

Le modèle élastique linéaire isotrope et la partie élastique de la plupart des modèles de comportement élastoplastique sont définis par la donnée des paramètres suivants :

- la masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}]
- le module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- le coefficient de Poisson ν (POISS) [-]

3.2.2. Elasticité linéaire isotrope transverse (IMOD=2)

Dans le cas isotrope, l'application à un volume élémentaire de deux incréments de contraintes qui se déduisent l'un de l'autre par une rotation conduit à des incréments de déformation qui se déduisent l'un de l'autre par la même rotation : autrement dit, le matériau présente les mêmes caractéristiques de raideur dans toutes les directions de l'espace. En particulier, les incréments de contraintes et de déformation ont toujours les mêmes directions principales et les mêmes vecteurs propres.

Le solveur CESAR propose un modèle élastique linéaire isotrope transverse, décrit dans le Référentiel théorique des familles 01 et 02 : dans ce modèle, le matériau possède un axe de symétrie de révolution et admet pour plans de symétrie tous les plans passant par cet axe et le plan perpendiculaire à cet axe.

Formulation du modèle

On note e_ν un vecteur unitaire de l'axe de symétrie, et (e_{h1}, e_{h2}) deux vecteurs du plan perpendiculaire à e_ν tels que (e_{h1}, e_{h2}, e_ν) forme un trièdre orthonormé direct.

En notant σ_{ij} et ε_{ij} les composantes des tenseurs σ et ε dans la base (e_{h1}, e_{h2}, e_ν) , le comportement isotrope transverse se formule de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_h & -\nu_h/E_h & -\nu_v/E_v & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_h/E_h & 1/E_h & -\nu_v/E_v & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_v/E_v & -\nu_v/E_v & 1/E_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_h)/E_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

avec :

E_v module d'Young dans la direction de l'axe de symétrie (ou module d'Young longitudinal)

E_h module d'Young dans le plan d'isotropie (ou module d'Young transverse)

ν_h coefficient de Poisson dans le plan d'isotropie

ν_v coefficient de Poisson transverse

G module de cisaillement qui caractérise la relation entre la déformation de cisaillement et la contrainte de cisaillement dans un plan contenant l'axe de symétrie de révolution.

Le modèle est donc caractérisé par les cinq paramètres E_h , E_v , ν_h , ν_v et G , et par la définition de la direction de l'axe e_v .

En condition bidimensionnelle et en déformation plane, la direction de l'axe de symétrie e_v est dans le plan du maillage. On suppose que le vecteur e_{h2} est également dans le plan du maillage, de sorte que la direction e_{h1} coïncide avec la normale au plan du maillage. L'orientation du trièdre (e_{h1} e_{h2} e_v) est définie par la donnée de l'angle entre l'axe horizontal Ox et e_{h2} :

$$e_{h1} = e_z$$

$$e_{h2} = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y$$

$$e_v = -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y$$

où (e_x, e_y) est la base du repère cartésien utilisé pour définir les coordonnées des nœuds du maillage et e_z la normale au plan du maillage.

En condition tridimensionnelle, la direction de l'axe d'orthotropie e_v dépend des deux angles d'Euler notés θ et φ sur la figure suivante.

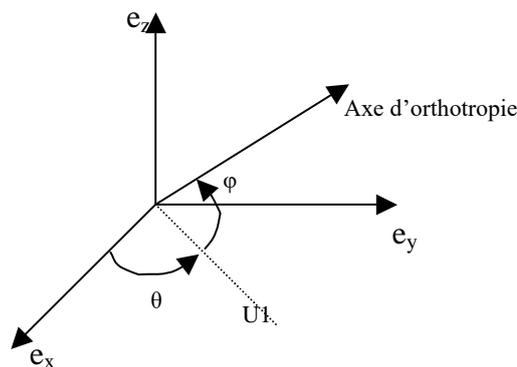


Figure 1 – Définition de l'axe d'orthotropie

Plus précisément :

$$u_1 = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y$$

$$u_2 = -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y$$

$$u_3 = e_z$$

$$e_v = \cos \varphi u_1 + \sin \varphi u_3$$

$$e_{h1} = u_2$$

$$e_{h2} = e_v \wedge e_{h1} = -\sin \varphi u_1 + \cos \varphi u_3$$

soit :

$$e_{h1} = -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y;$$

$$e_{h2} = -\sin \varphi \cos \theta e_x - \sin \varphi \sin \theta e_y + \cos \varphi e_z$$

$$e_v = \cos \varphi \cos \theta e_x + \cos \varphi \sin \theta e_y + \sin \varphi e_z;$$

Paramètres du modèle élastique linéaire orthotrope (IMOD=2)

- masse volumique (RO) [kg m⁻³]
- module d'Young dans le plan d'isotropie E_h (E1) [Pa]
- module d'Young dans la direction de l'axe E_v (E2) [Pa]
- coefficients de Poisson dans le plan d'isotropie ν_h (P1) [-] et transverse ν_v (P2) [-]
- module de cisaillement G (G2) [Pa]
- en condition bidimensionnelle :
 - angle θ entre l'horizontale et le plan d'isotropie (TETA) [degrés]
- en condition tridimensionnelle :
 - deux angles θ et φ définissant la direction de l'axe d'orthotropie (TETA, PHI) [degrés]

3.2.3. Elasticité linéaire orthotrope

Les applications pour lesquelles les lois de comportement mécanique non linéaires ont été développées à l'origine, essentiellement liées à la géotechnique, font que l'on n'a pas jugé utile, dans un premier temps, de programmer une loi de comportement élastique orthotrope. On peut cependant disposer de ce modèle en utilisant les lois de comportement « à composantes » (cf paragraphe 3.3.3.7).

3.2.4. Elasticité avec dilatance isotrope (IMOD=88)

L'idée de ce modèle proposé par R. Frank (1974) est de définir une variation de volume élastique due au déviateur, en plus de la variation de la compression isotrope « élastique » :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - k \Delta\tau$$

où : $\Delta\tau = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2$

On voit que cette formulation est non linéaire. Lors de la programmation, la formule précédente a été modifiée comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - k_A \Delta\tau - k_B I_1 - k_C I_3$$

qui consiste à introduire dans la correction un terme linéaire (proportionnel à I₁) et d'un terme proportionnel à I₃.

Paramètres du modèle « élasticité avec dilatance isotrope » (IMOD=88)

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}]
- module d'Young (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- coefficient affecté au cisaillement k_A (XKA) [Pa^{-1}]
- coefficient affecté à la variation de volume k_B (XKB) [Pa^{-1}]
- coefficient affecté au troisième invariant k_C (XKC) [Pa^{-1}]

3.2.5. Comportement du béton au jeune âge (IMOD=5)

La modélisation du béton au jeune âge prend en compte des phénomènes liés aux réactions chimiques qui se manifestent lors de la prise : exothermie des réactions et maturation du matériau. Le modèle de comportement, dépendant du temps, consiste à relier les comportements thermique et mécanique par la détermination des champs de températures d'une part et l'évolution des propriétés mécaniques élastiques en fonction de l'avancement des réactions d'autre part. La modélisation s'effectue donc par l'enchaînement d'un calcul de diffusion particulier (avec le module TEXO) et d'un calcul de mécanique spécifique (avec le module MEXO).

La réaction d'hydratation du ciment d'un béton, en cours de prise, se traduit au niveau microscopique par une augmentation de la quantité d'hydrates. Elle s'accompagne, au niveau macroscopique, d'une évolution de la raideur du matériau, d'un retrait endogène d'auto dessiccation (conséquence de la contraction Le Chatelier) et de déformations d'origine thermique. Mécaniquement, en considérant que le matériau est élastique et en négligeant les effets de fluage, l'incrément de contrainte est donné par :

$$d\sigma = 2 G(\xi) d\varepsilon + K(\xi) [d\varepsilon - 3 \alpha dT - 3 \beta d\xi]$$

où ε représente la trace du tenseur des déformations et e sa partie déviatorique.

$K(\xi)$ et $G(\xi)$ sont, respectivement, les modules de compressibilité et de cisaillement, α est le coefficient de dilatation thermique linéique et β le coefficient de dilatation / retrait chimique. En première approche, α et β sont supposés constants. Le coefficient β coïncide alors avec le retrait endogène total enregistré pour un béton.

Les modules de compressibilité et de cisaillement, que l'on peut relier aisément au module d'Young et au coefficient de Poisson sont fonction du degré d'hydratation du matériau :

$$K(\xi) = \frac{E(\xi)}{3(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G(\xi) = \frac{E(\xi)}{2(1+\nu)}$$

Le coefficient de Poisson est considéré ici comme constant. L'évolution du module d'Young est donnée par une adaptation de la loi de Byfors :

$$E(\xi) = E_\infty f(\xi) \quad \text{avec} \quad f(\xi) = \frac{1 + 1,37 R_{c\infty}^{2,204}}{1 + 1,37 R_c(\xi)^{2,204}} \left[\frac{R_{c\infty}}{R_c(\xi)} \right]^{2,675} \quad \text{et} \quad R_{c\infty} = \left[\frac{E_\infty}{7250} \right]^{0,471}$$

où E_∞ et $R_{c\infty}$ représentent respectivement le module d'Young et la résistance en compression du matériau durci. La résistance à la compression $R_{c\infty}(\xi)$ est donnée par une fonction bilinéaire de ξ (ξ_0 est la valeur seuil du degré d'hydratation au-delà de laquelle le matériau est considéré comme solide) :

$$R_c(\xi) = \begin{cases} \xi R_{co} & \text{si } \xi \leq \xi_0 \text{ avec } R_{co} = \xi_0 R_{c\infty} / 10 \\ (R_{c\infty} - R_{co}) \frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi_0} + R_{co} & \text{si } \xi > \xi_0 \end{cases}$$

Paramètres du modèle « béton au jeune âge » (IMOD=5)

- masse volumique (RO) [kg m⁻³]
- module d'Young (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- coefficient de dilatation thermique α (DILAT) [K⁻¹]
- retrait endogène final du béton β (RETRA) [-]
- valeur seuil du matériau ξ° (SEUIL) [-]
- degré d'hydratation (HYD) : égal à zéro pour un matériau chimiquement actif, et à une valeur non nulle pour un matériau chimiquement inactif, dont le degré d'hydratation est fixé à la valeur HYD (le groupe correspondant doit être déclaré inactif avec l'option INA lors du calcul TEXO).

3.2.6. Modèle de Mohr Coulomb sans écoulement (IMOD=10)

Le critère de Mohr-Coulomb est le critère de plasticité le plus classique en mécanique des sols, issu des travaux de Coulomb sur la stabilité et la rupture des ouvrages. Il exprime le fait que la contrainte tangentielle τ sur une surface matérielle est limitée par une valeur qui dépend de la contrainte normale σ qui s'exerce sur cette facette : $|\tau| \leq c + \sigma \tan \varphi$. On donne ci-dessous une formulation équivalente, qui fait intervenir les contraintes principales. On notera par ailleurs que le critère de Mohr-Coulomb coïncide avec le critère proposé par Tresca en 1864 pour les métaux lors que l'angle φ est nul.

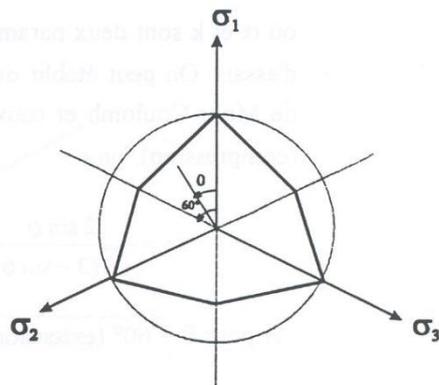
Le modèle de Mohr-Coulomb (IMOD=10) de CESAR est un modèle élastoplastique sans écoulement.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

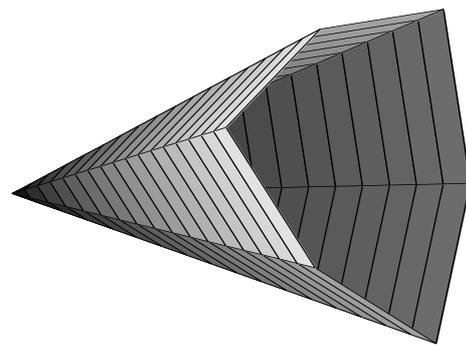
Le critère de plasticité est celui de Mohr-Coulomb, qui s'écrit, dans le contexte de la mécanique des sols :

$$f(\sigma) = \Sigma_1 - \Sigma_3 - (\Sigma_1 + \Sigma_3) \sin \varphi - 2 c \cos \varphi$$

où Σ_1 et Σ_3 représentent respectivement la plus grande et la plus petite des contraintes principales comptées positivement en compression. On notera que la valeur du critère ne dépend pas de la contrainte principale intermédiaire Σ_2 .



dans le plan déviatorique



dans l'espace des contraintes principales

Figure 2 - Représentation du critère de Mohr-Coulomb (d'après Lee, 1994)

Le paramètre c est appelé cohésion du matériau et l'angle φ angle de frottement interne. Lorsque $\varphi = 0$, le critère de Mohr Coulomb se ramène au critère de Tresca, qui stipule que la différence entre deux contraintes principales ne peut pas dépasser une valeur limite égale à deux fois la cohésion :

$$f_{\text{TRESCA}}(\sigma) = \text{Sup } |\sigma_i - \sigma_j| - 2 c$$

Le critère de Mohr-Coulomb est généralement utilisé avec un potentiel plastique de la même forme, mais avec un angle différent de l'angle de frottement :

$$g(\sigma) = \Sigma_1 - \Sigma_3 + (\Sigma_1 + \Sigma_3) \sin \psi + \text{constante}$$

où ψ est l'angle de dilatance ($\psi = \varphi$ si la règle d'écoulement est associée).

On notera que lorsque la loi d'écoulement est associée et l'angle de frottement non nul, la loi d'écoulement conduit à une augmentation de volume irréversible contrôlée par l'angle de frottement et souvent peu réaliste pour les fortes déformations de cisaillement : ce modèle ne permet pas de décrire le fait que le cisaillement d'un sol finit généralement par se faire à volume constant (c'est ce type de constatation expérimentale qui a conduit à introduire le concept d'état critique en mécanique des sols).

Paramètres du modèle de Mohr-Coulomb (IMOD=10)

- masse volumique (RO) [kg m^{-3}]
- module d'Young (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- cohésion c (C) [Pa]
- angle de frottement φ (PHI) [degrés]
- angle de dilatance ψ (PSI) [degrés]

3.2.7. Modèle de Von Mises sans écrouissage (IMOD=11)

Le critère de von Mises a été proposé indépendamment par plusieurs auteurs, dont von Mises lui-même en 1913, à la suite d'expériences effectuées sur les métaux. Il s'agit d'un critère portant sur le déviateur du tenseur des contraintes.

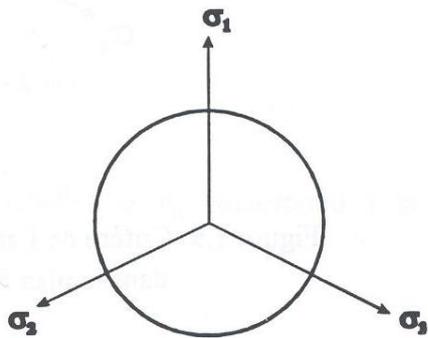
La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère proposé par von Mises s'écrit simplement en fonction du deuxième invariant du tenseur des contraintes J_2 :

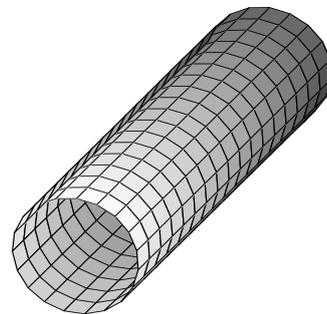
$$f(\sigma) = J_2 - k^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2$$

Le critère ne dépend donc que d'un paramètre matériel k , qui représente la résistance maximale du matériau au cisaillement simple. Un calcul simple montre que la résistance en traction simple est égale à $k\sqrt{3}$.

La loi d'écoulement est associée.



dans le plan déviatorique



dans l'espace des contraintes principales

Figure 3 - Représentation du critère de Von Mises (d'après Lee, 1994)

Paramètres du modèle de von Mises sans écrouissage (IMOD=11) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}]
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa]
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-]
- résistance en cisaillement simple k (κ) [Pa]

3.2.8. Modèle de von Mises avec écrouissage (IMOD=12)

Il s'agit d'un modèle élastoplastique avec écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère de rupture est à nouveau celui de von Mises (comme pour le modèle précédent) :

$$f(\sigma) = J_2 - k^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2$$

mais la résistance maximale du matériau au cisaillement simple k est désormais susceptible d'évoluer à mesure que des déformations plastiques se produisent dans le matériau.

La loi d'écoulement est associée.

La loi d'écrouissage consiste à faire dépendre le scalaire k du travail plastique W^p , défini de manière incrémentale par :

$$dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$

La loi d'évolution de k est donnée par :

$$k + \Delta k = \sqrt{k^2 + 2H \Delta W^p}$$

où Δk et ΔW^p désignent les accroissements de k et W^p . Selon le signe de H , ce modèle permet de représenter un écrouissage classique (écrouissage positif : la taille du domaine élastique augmente), ou une perte de résistance (écrouissage négatif : le domaine élastique rétrécit). L'identification du paramètre H repose sur l'étude d'essais uniaxiaux (Ricard, 1975 ; Yuritzin, 1981) : H désigne la pente constante de la courbe (ε^p, σ) pour un essai uniaxial.

Paramètres du modèle de von Mises avec écrouissage (IMOD=12) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}]
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa]
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-]
- résistance en cisaillement simple initiale k (K) [Pa]
- le paramètre H de la loi d'écrouissage (H) [Pa]

3.2.9. Modèle de Drucker Prager sans écrouissage (IMOD=13)

Le critère de Drucker-Prager (1952) constitue une généralisation du critère de von Mises aux matériaux pulvérulents, prenant en compte le premier invariant du tenseur des contraintes I_1 et le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 .

Il s'agit d'un modèle élastoplastique sans écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

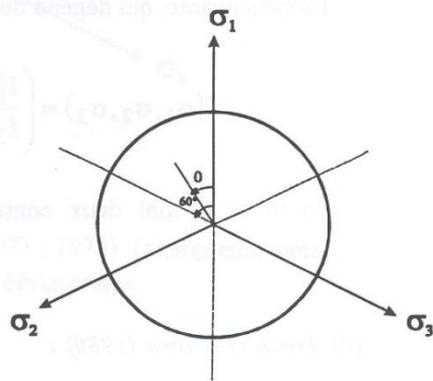
Le critère de rupture est donné par l'expression :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k$$

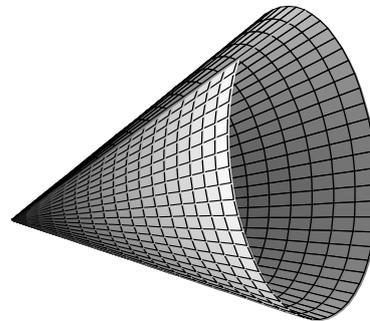
Le potentiel plastique est de la même forme :

$$g(\sigma) = \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \text{constante}$$

La règle d'écoulement est associée si les paramètres α et β sont égaux. Si les paramètres α et β sont nuls, la loi se réduit à la loi de Von Mises.



dans le plan déviatorique



dans l'espace des contraintes principales

Figure 4 - Représentation du critère de Drucker-Prager (d'après Lee, 1994)

En pratique, le solveur CESAR n'utilise pas les paramètres α , β et k , mais trois autres paramètres c , φ et ψ reliés aux précédents par :

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad \beta = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$$

Ce choix permet de retrouver avec le modèle de Drucker-Prager des résultats identiques à ceux obtenus avec le critère de Mohr-Coulomb pour la simulation d'un essai triaxial de révolution en compression ($0 > \sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$). On notera en particulier qu'il ne permet pas de retrouver des résultats identiques avec les deux modèles pour un essai triaxial d'extension ($0 > \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) ou un essai de cisaillement en déformation plane ($\varepsilon_2 = 0$).

On appelle c la cohésion, et les angles φ et ψ sont appelés angles de frottement et de dilatance.

Paramètres du modèle de Drucker Prager sans écoulement (IMOD=13) :

- masse volumique (RO) [kg m⁻³]
- module d'Young (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- cohésion c (C) [Pa]
- angle de frottement φ (PHI) [degrés]
- angle de dilatance ψ (PSI) [degrés]

3.2.10. Modèle de Drucker Prager avec écoulement (IMOD=14)

Il s'agit d'un modèle élastoplastique avec écoulement.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν.

Le critère de rupture est donné par l'expression :

$$f(\sigma, c) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k(c)$$

Le potentiel plastique est de la même forme :

$$g(\sigma) = \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \text{constante}$$

où les paramètres α, β et k sont déduits des paramètres c, φ et ψ par :

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad \beta = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$$

Les angles φ et ψ sont constants ; le paramètre c joue le rôle de paramètre d'écoulement. Son évolution est donnée par la loi suivante :

$$\dot{c} = -\lambda \frac{\mu}{1 + \chi}$$

où μ = E / [2(1+ν)] désigne le module de cisaillement.

Note 1 : L'écoulement peut être positif ou négatif selon la valeur de 1+χ.

Note 2 : La loi d'écoulement et la loi d'écoulement permettent de relier simplement l'évolution de c à celle de la déformation volumique plastique.

Paramètres du modèle de Drucker Prager avec écoulement (IMOD=14) :

- masse volumique (RO) [kg m⁻³]
- module d'Young (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- valeur initiale du paramètre d'écoulement c (C) [Pa]
- angles de frottement φ (PHI) [degrés] et de dilatance ψ (PSI) [degrés]
- coefficient χ (XHI) de la loi d'écoulement

3.2.11. Critère parabolique (IMOD=15)

Le critère parabolique permet de représenter de manière schématique la résistance du béton.

Il s'agit d'une loi de comportement élastoplastique sans écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère de rupture « parabolique » a été développé pour représenter le comportement du béton. Il est donné par la formule :

$$f(\sigma) = J_2 + (R_c - R_t) I_1 / 3 - R_c R_t / 3 = 0$$

Le paramètre R_c représente la résistance en compression simple et R_t la résistance en traction simple du matériau. La résistance à la traction d'un béton R_t est considérée comme nulle ou valant quelques MPa. La résistance en compression R_c peut varier beaucoup en fonction de la composition du ciment et du rapport entre ses constituants : des valeurs courantes sont comprises entre 25 et 50 MPa (Fauchart, 1977).

La loi d'écoulement est associée.

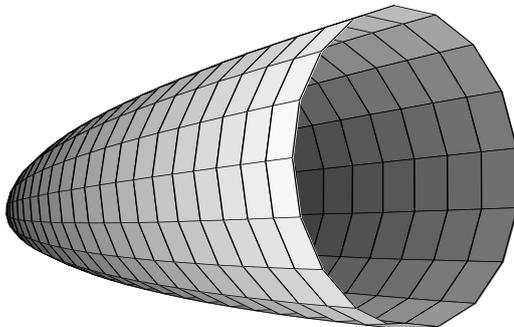


Figure 5 - Représentation du critère parabolique dans l'espace des contraintes principales

Paramètres du critère parabolique (IMOD=15) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}]
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa]
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-]
- résistance en compression simple R_c (RC) [Pa]
- résistance en traction simple R_t (RT) [Pa]

3.2.12. Modèle de Vermeer (IMOD=16)

La loi de comportement développée par Peter Vermeer (1978, 1980, 1982), est une loi élastoplastique à deux mécanismes écrouissables, développée pour représenter le comportement des sables. Le premier mécanisme est un mécanisme purement volumique (mécanisme de consolidation) et le second mécanisme est purement déviatorique (mécanisme de cisaillement), fondé sur le critère de rupture défini par Matsuoka et Nakaï (1974).

L'élasticité de la loi proposée par Vermeer correspond à un module de cisaillement sécant dépendant de l'état de contraintes et un coefficient de Poisson nul :

$$\sigma_{ij} = 2 G_s \varepsilon_{ij}$$

$$\text{avec } G_s = G_o [\sigma_n / p_o]^{(1-\beta)} \text{ et } G_o = 3p_o / (2\varepsilon_o^e)$$

où p_o , ε_o^e , β sont trois constantes et σ_n désigne l'invariant de contraintes défini par $\sigma_n^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) / 3$

Description du modèle programmé dans CESAR :

Il s'agit d'un modèle élastoplastique à deux surfaces de charge avec écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Mécanisme plastique volumique :

Le critère est donné par :

$$f_v(\sigma, \varepsilon_{vc}^p) = \varepsilon_o^c [\sigma_n / p_o]^\beta - \varepsilon_{vc}^p$$

où ε_o^c est une constante et ε_{vc}^p le paramètre d'écrouissage de la surface de charge. La loi d'écoulement pour ce mécanisme est associée.

Mécanisme plastique déviatorique :

La deuxième surface de charge est définie par un autre critère :

$$f_c(\sigma, x) = 3 p J_2 - I_3 A(x)$$

où A(x) est une fonction scalaire définie par les relations :

$$A(x) = \frac{27 (3 + h(x))}{(2 h(x) + 3) (3 - h(x))} \quad c = \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p}$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + cx} - \frac{x}{2} \quad x = \gamma^p 2 \frac{G_o (p_o)}{p_o (\sigma_n)^\beta}$$

Dans ces expressions, φ_p représente l'angle de frottement au pic et γ^p la distorsion plastique définie par $(\gamma^p)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p$

La loi d'écoulement pour ce mécanisme est non associée. Le potentiel plastique est construit en utilisant une relation de type contrainte-dilatance. Son expression est donnée par :

$$g_c(x) = \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ij}} - \frac{4}{3} p \sin \psi_m$$

L'angle de dilatance ψ_m est lié à l'état de contraintes par la relation proposée par Rowe (1971) :

$$\sin \psi_m = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_m \sin \varphi_{cv}}$$

Où φ_{cv} est l'angle de frottement à volume constant, supposé caractériser les états de cisaillement ultimes du matériau. L'angle φ_m est l'angle de frottement mobilisé, relié à l'état de contrainte par la relation :

$$\sin \varphi_m = \frac{3q}{6p+q}$$

Les paramètres de la loi de Vermeer sont déterminés à partir d'essais triaxiaux de compression axisymétrique drainée avec une phase de déchargement. Cette détermination est discutée par exemple dans Mestat (1993).

Paramètres du modèle de Vermeer (IMOD=16) :

- masse volumique (RO) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-] ;
- paramètre ε_o^e (EPSO) ;
- angle de frottement φ_{cv} pour lequel le cisaillement se fait à volume constant (PHICV) ;
- angle de frottement au pic φ_p (PHIP) ;
- paramètre β (BETA) ;
- paramètre ε_o^c (EPSCO) ;
- pression de référence p_o (PO) .

Note : la partie élastique de la loi a été linéarisée, mais les paramètres EPSO et BETA interviennent dans la loi d'érouissage du premier mécanisme.

3.2.13. Modèle de Nova (IMOD=17)

Le modèle de Nova (1982) est une loi élastoplastique avec écrouissage isotrope, inspirée des lois de type Cam-Clay (voir IMOD=18 ci-après), mais adaptée à la description du comportement des sables. Elle a été développée à partir de résultats d'essais sur éprouvettes cylindriques, ce qui explique sa formulation en fonction des invariants des contraintes p (pression moyenne) et q (déviateur des contraintes) et des invariants de déformations plastiques ε_v^p (déformation volumique plastique) et ε_d^p (déformation déviatorique plastique).

L'élasticité proposée par Nova est isotrope et non linéaire :

$$\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p} \quad d\varepsilon_{ij} = L_o d\eta_{ij} + B_o \frac{dp}{3p} \delta_{ij}$$

où B_o et L_o sont deux paramètres et δ_{ij} les composantes du tenseur de Kronecker.

Un des fondements de cette loi est la relation contrainte-dilatance adoptée par R. Nova selon la valeur du rapport de contraintes q/p .

Description du modèle programmé dans CESAR :

Il s'agit d'un modèle élastoplastique caractérisé par deux régimes d'écoulement qui se distinguent par la valeur du rapport des contraintes q/p . Dans les deux régimes, il y a un écrouissage de la surface de charge. L'un des régimes ($q/p < M/2$) est associé, l'autre ($q/p > M/2$) est non associé.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

La relation contrainte-dilatance proposée par R. Nova est différente selon que le rapport de contraintes q/p est supérieur ou inférieur à une valeur notée $M/2$:

- si $q/p < M/2$,

la règle d'écoulement est associée, et l'expression de la surface de charge est donnée par :

$$f(p, q, p_c) = \frac{4\mu q^2}{M^2 p^2} + 1 - \frac{p_c^2}{p^2}$$

où μ est une constante et p_c le paramètre d'écrouissage.

- si $q/p > M/2$,

la règle d'écoulement n'est plus supposée associée. La surface de charge est celle proposée par Tatsuoka et Ishihara (1974) :

$$f(p, q, p_c) = \frac{q}{p} - M + m \ln \left(\frac{p}{p_u} \right)$$

où le paramètre p_u est directement relié au paramètre d'écrouissage :

$$p_u = \frac{p_c}{\sqrt{1+\mu}} \exp \left[-\frac{M}{2m} \right]$$

Le potentiel plastique est donné par :

$$G(p, q) = q/p - M/(1-\mu) [1 - \mu (p/p_{cg})^{(1-\mu)/\mu}]$$

où p_{cg} est une constante qu'il n'est en principe pas nécessaire de préciser ; la forme du potentiel permet d'assurer que les déformations plastiques volumique et déviatorique vérifient :

$$d\varepsilon_v^p = \frac{M-(q/p)}{\mu} d\varepsilon_d^p$$

Le paramètre d'écroûissage p_c suit une loi d'évolution proche de celle des lois Cam-Clay ; la différence provient de la prise en compte du terme déviatorique ε_d^p dans la loi de Nova :

$$p_c = p_c^o \exp \left[- \frac{\varepsilon_v^p + D\varepsilon_d^p}{1-B_o} \right]$$

On trouvera dans (Mestat, 1993) les valeurs des paramètres du modèle de Nova pour différents sables, ainsi que des indications pour la détermination de ces paramètres à partir d'essais triaxiaux de compression axisymétrique drainée avec une phase de déchargement.

Paramètres du modèle de Nova (IMOD=17) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa] ;
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-] ;
- paramètre L_o de la loi élastique non linéaire ($L0$) [-] ;
(paramètre ignoré par le solveur car la loi élastique a été « linéarisée ») ;
- paramètre B_o de la loi élastique non linéaire ($B0$) [-], figurant aussi dans la loi d'écroûissage ;
- paramètre décrivant la transition entre les deux régimes d'écoulement M (M) [-] ;
- paramètres I (I) [-] et D (D) [-] intervenant dans la loi d'écroûissage ;
- paramètres m (MM) [-] et μ (MU) [-] ;
- valeur initiale p_c^o ($PC0$) [Pa] du paramètre d'écroûissage p_c .

3.2.14. Modèle Cam-Clay modifié (IMOD=18)

Le terme de Cam-Clay fait référence à un ensemble de lois de comportement développées dans les années 1960 par le groupe de mécanique des sols de l'Université de Cambridge (Roscoe et al., 1958; Schofield et Wroth, 1968). Ce sont des lois élastoplastiques avec écrouissage, destinées essentiellement à décrire le comportement des argiles reconstituées en laboratoire. La formulation originale mettait en jeu une loi élastique isotrope non linéaire, du type :

$$d\varepsilon_v^e = -\frac{\kappa}{1+e_0} \frac{dp}{p} \quad d\varepsilon_d^e = \frac{dq}{3G}$$

Dans CESAR-LCPC, le modèle IMOD=18 reprend la surface de charge du modèle appelé « Cam-Clay modifié » et la loi d'écrouissage correspondante. En revanche, le modèle disponible ne reprend pas la loi élastique originale, qui est remplacée par une élasticité linéaire isotrope.

Description du modèle programmé dans CESAR

Il s'agit d'un modèle élastoplastique avec écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère de rupture est donné par l'expression :

$$f = q^2 + M^2 p (p - p_c) = 0$$

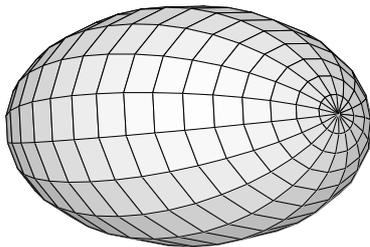


Figure 6 - Représentation du critère de Cam-Clay dans l'espace des contraintes principales

Le paramètre M est fixe. Il contrôle l'excentricité de l'ellipse qui définit la frontière du domaine élastique dans l'espace (p,q), et représente aussi la pente de la courbe d'état critique dans le même plan. Il peut être relié à l'angle de frottement interne φ' par :

$$M = \frac{6 \sin \varphi'}{3 - \sin \varphi'}$$

Le paramètre p_c est le paramètre d'écrouissage.

La règle d'écoulement est associée.

La loi d'écrouissage relie les variations du paramètre d'écrouissage et de la déformation volumique plastique ε_v^p suivant :

$$p_c = p_{c0} \exp(\alpha_p \varepsilon_v^p) \quad \text{avec } \alpha_p = \frac{1+e_0}{\lambda-\kappa}$$

où p_c représente la pression de consolidation et e_0 l'indice des vides initial ; il correspond à la pression de consolidation initiale p_{c0} .

Le paramètre λ représente la pente de la courbe de consolidation vierge dans un diagramme (e-ln p) représentant les résultats d'un essai de compression isotrope. Le paramètre κ représente la pente des

courbes déchargement-rechargement dans le même diagramme. On considère en général que λ et κ sont reliés aux coefficients C_c et C_s déduits d'un essai oedométrique classique par les formules $\lambda = C_c/\ln 10$ et $\kappa = C_s/\ln 10$.

Paramètres du modèle de Cam-Clay modifié (IMOD=18) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa] ;
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-] ;
- pente de la courbe de consolidation vierge λ ($ALOE$) [-] dans un diagramme $e-\ln p$ pour un essai de compression isotrope ;
- pente des courbes de charge-décharge κ ($AKOE$) [-] du diagramme $e - \ln p$;
- pente de la courbe d'état critique M (AMC) [-] ;
- indice des vides initial e_0 (OED) [-] ;
- contrainte de préconsolidation initiale p_{co} ($PC0$) [Pa] ;

3.2.15. Modèle de Prévost et Hoeg (IMOD=19)

Ce modèle de comportement a été élaboré pour représenter le radoucissement dans les sols et les roches, c'est-à-dire la perte progressive de la résistance mécanique après le pic de contraintes. Elle repose sur l'utilisation du critère de von Mises avec un écrouissage particulier. La variable d'écrouissage est la distorsion plastique. Il est à noter également que le domaine d'élasticité initial est vide, et que le critère est insensible à la contrainte moyenne.

Il s'agit d'un modèle élastoplastique avec écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère est celui du modèle de von Mises :

$$f(\sigma) = J_2 - k^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2$$

La loi d'écoulement est associée.

L'évolution du paramètre d'écrouissage k est liée à celle des déformations plastiques par :

$$k = \frac{A [B (\bar{\varepsilon}_d^p)^2 + \bar{\varepsilon}_d^p]}{1 + (\bar{\varepsilon}_d^p)^2} / \sqrt{3}$$

où $\bar{\varepsilon}_d^p$ est défini par : $d\bar{\varepsilon}_d^p = 10^3 \times \left[\frac{2}{3} (d\varepsilon_d^p)_{ij} (d\varepsilon_d^p)_{ij} \right]^{1/2}$

ε_d^p étant le déviateur du tenseur des déformations plastiques.

Le modèle comprend 4 paramètres : E , ν , A , B . La signification de A et B est illustrée par la figure ci-dessous. On observe en particulier que l'écrouissage est d'abord positif puis négatif.

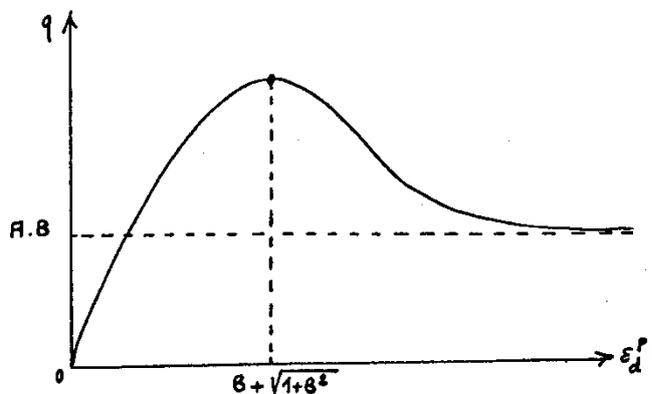


Figure 7 - Paramètres du modèle de Prévost et Hoeg

Paramètres du modèle de Prévost et Hoeg (IMOD=19) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa] ;
- coefficient de Poisson (ν) [POISS] [-] ;
- coefficients A (A_0) [-] et B (B_0) [-].

3.2.16. Critère orienté (IMOD=20)

Contrairement aux critères définis à partir des invariants du tenseur des contraintes (dont la valeur ne dépend pas de l'orientation des contraintes principales), ce critère permet de rendre compte du caractère anisotrope des massifs de sol ou de roche. Il s'agit de donner au massif continu une direction de déformation plastique simulant le cisaillement des discontinuités dans un massif fracturé. Cette loi de comportement est inspirée de la loi proposée par Cramer pour représenter une interface, ou discontinuité, par une mince bande de matériau continu. Le critère de rupture a été étendu par Frank et al. (1982).

Il s'agit d'un modèle élastoplastique sans écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère de plasticité impose une condition de résistance de Coulomb qui porte sur les composantes normale σ_n et tangentielle τ du vecteur-contrainte s'exerçant sur une facette de normale \underline{n} :

$$f(\sigma) = |\tau| + \sigma_n \tan \varphi - c$$

où c est la cohésion du matériau et φ l'angle de frottement.

Les composantes τ et σ_n s'expriment en fonction du tenseur de contraintes par :

$$\sigma_n = (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \qquad \tau = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \sigma_n \underline{n}$$

En condition bidimensionnelle, on donne l'angle α entre la facette et l'horizontale, de sorte que

$$\underline{n} = -\sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{e}_y$$

ce qui conduit à :

$$\sigma_n = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) (\cos 2\alpha)/2 - \sigma_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) (\sin 2\alpha)/2 + \sigma_{xy} \cos 2\alpha$$

En condition tridimensionnelle, on définit l'orientation de la facette par les trois composantes du vecteur \underline{n} .

Le potentiel plastique est de la même forme que le critère :

$$g(\sigma) = |\tau| + \sigma_n \tan \psi + \text{constante}$$

où ψ est un angle qui permet de prendre en compte le comportement dilatant du matériau.

Paramètres du critère orienté (IMOD=20) :

- masse volumique (RO) [kg m^{-3}];
- module d'Young (YOUNG) [Pa];
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-];
- cohésion c (C) [Pa]
- angle de frottement φ (PHI) [degrés] et de dilatance ψ (PSI) [degrés];
- en condition bidimensionnelle, angle α (ALPHA) [degrés].
- en condition tridimensionnelle, trois composantes u_1, u_2, u_3 (U1, U2, U3) [-] du vecteur normal \underline{n} dans le repère (O, Ox, Oy Oz) du maillage

3.2.17. Modèle de Hoek et Brown (IMOD=24)

Pour les massifs rocheux, Hoek et Brown ont proposé un critère de rupture, dans lequel la contrainte de cisaillement maximale appliquée sur une facette augmente moins vite avec la contrainte normale p qu'avec le critère habituel de Mohr-Coulomb.

Il s'agit d'un modèle élastoplastique sans écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère de rupture s'écrit :

$$f(\sigma) = \Sigma_1 - \Sigma_3 - \sigma_u \sqrt{m \frac{\Sigma_3}{\sigma_u} + s}$$

où m est un paramètre de forme, s le coefficient de fracturation et σ_u un paramètre de résistance. On vérifiera sans peine que $\sigma_u \sqrt{s}$ donne la résistance en compression simple du matériau.

La loi d'écoulement programmée dans le solveur CESAR est associée.

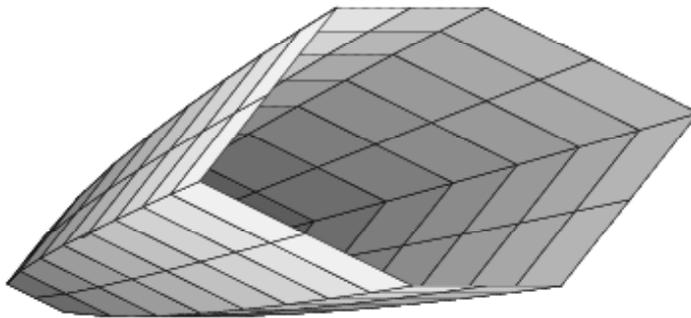


Figure 8 - Représentation du critère de Hoek et Brown dans l'espace des contraintes principales

Paramètres du modèle de Hoek et Brown (IMOD=24) :

- masse volumique (RO) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa] ;
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-] ;
- paramètre de résistance σ_u (SU) [Pa] ;
- coefficient de fracturation s (S) [-] ;
- paramètre de forme m (M) [-].

3.2.18. Modèle Mélanie (IMOD=34 en 2D et 35 en 3D)

Il s'agit d'une loi de comportement élastoplastique anisotrope écrouissable qui s'inspire à la fois des lois de l'Université de Cambridge, des travaux réalisés à l'Université Laval de Québec sous la direction de F. Tavenas et S. Leroueil et des travaux du LCPC sur le comportement unidimensionnel des argiles molles naturelles.

Le modèle Mélanie est un modèle élastoplastique avec écrouissage.

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et anisotrope transverse : les données à fournir sont définies de la même façon que pour le modèle élastique linéaire orthotrope IMOD=2 (3.2.2).

La surface de charge a été identifiée sur la base d'essais interprétés à l'aide des contraintes réduites s' et t définies par les relations suivantes :

$$t = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad s' = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

où les contraintes σ_1 et σ_3 sont ici définies dans le contexte d'essais triaxiaux : σ_1 est la contrainte (de compression) axiale et σ_3 la contrainte de confinement latéral. Le critère a pour expression :

$$f(s', t, s'_p) = A^2 (s' \cos \beta + t \sin \beta - s'_p / A C)^2 + B^2 (t \cos \beta - s' \sin \beta)^2 - s'_p{}^2 / C^2$$

avec

$$s'_p = 0,3 (1 + K_o) \sigma'_p \qquad A = 2 (\sin \beta + \cos \beta)$$

$$B^2 = A^2 \cos^2 \beta (2/A - C \cos \beta) / (C \sin^2 \beta) \qquad C = 0,6$$

Le domaine élastique est, dans le plan (s', t) , limité par une ellipse dont le grand axe fait avec l'axe de compression isotrope Os' un angle β déterminé par la relation :

$$\tan \beta = (1 - K_o) / (1 + K_o)$$

où K_o désigne le coefficient de pression des terres au repos (dans le domaine normalement consolidé). Le paramètre s'_p est le paramètre d'écrouissage.

La direction des déformations plastiques en un point M du plan (s', t) est donnée :

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f / \partial \sigma_{ij}}{|\partial f / \partial \sigma_{ij}|} + \eta \frac{OM}{|OM|}$$

Si $\eta=0$ la loi est associée ; si $\eta=1$ la loi est non associée.

Il reste à préciser la loi d'écrouissage, c'est-à-dire à décrire l'évolution du paramètre s'_p . On s'appuie sur la courbe donnant l'évolution de l'indice des vides en fonction de s'_p :

$$e = e_{\lambda o} - \lambda \ln (s'_p / s'_i)$$

On utilise ensuite la relation entre la variation d'indice des vides et la déformation volumique :

$$de = (1 + e_o) d\varepsilon_v$$

pour aboutir à :

$$d\varepsilon_v^p = \frac{de}{(1 + e_o)} - d\varepsilon_v^e = -\lambda \frac{ds'_p}{(1 + e_o) s'_p} - d\varepsilon_v^e$$

On relie finalement $d\varepsilon_v^e$ à ds'_p par :

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\alpha}{1 + e_o} ds'_p$$

avec

$$\frac{\alpha}{1 + e_o} = \frac{(1 - \nu_h - 2n \nu_v^2) (1 + \nu_h) (2n \nu_v - 1 + \nu_h) - n (1 - n \nu_v^2)}{E_v \cdot n^2 \nu_v^2 (1 + \nu_h) - n (1 - n \nu_v^2) (1 - \nu_h)}$$

où n est le rapport E_h/E_v .

On pourra se reporter à Lépidas et Magnan (1990) ou Mestat (1993) pour obtenir des éléments sur la détermination des paramètres du modèle Mélanie.

Paramètres du modèle Mélanie (IMOD=34 en 2D et 35 en 3D) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young dans le plan d'isotropie E_h (E1) [Pa] ;
- module d'Young dans la direction de l'axe E_v (E2) [Pa] ;
- coefficients de Poisson dans le plan d'isotropie ν_h (P1) [-] et transverse ν_v (P2) [-] ;
- module de cisaillement G (G2) [Pa] ;
- en condition bidimensionnelle : angle θ entre l'horizontale et le plan d'isotropie (TETA) [deg] ;
- en condition tridimensionnelle :
deux angles θ et φ définissant la direction de l'axe d'orthotropie (TETA, PHI) [degrés] ;
- pente λ de la courbe de consolidation isotrope vierge (diagramme $e - \ln s'_p$) (ALPHA) [-] ;
- indice des vides initial e_o (OED) [-] ;
- contrainte verticale effective initiale (SIVO) [Pa] ;
- pression de préconsolidation (valeur initiale de $\sigma'_p = s'_p/0,6$) (SIPO) [Pa] ;
- K_{sc} : coefficient de pression des terres au repos du sol surconsolidé (dans l'état initial, utilisé pour initialiser le paramètre d'écroûissage) (CPSC) [-] ;
- K_{nc} : coefficient de pression des terres au repos du sol normalement consolidé (identique au coefficient K_o définissant l'orientation de l'ellipse dans le plan (s',t)) (CPNC) [-] ;
- indicateur de normalité η (JTA) [-] ;
- tolérance pour les itérations internes permettant de calculer $e_{\lambda o}$ (TOLC) [-].

3.2.19. Modèle de Tresca anisotrope (IMOD=40)

Ce modèle est disponible uniquement en 2D.

Ce modèle permet de faire dépendre la contrainte de cisaillement ultime de l'orientation de la plus grande contrainte principale de compression pour un sol purement cohérent. L'expression de la résistance anisotrope en fonction de l'orientation des contraintes principales est approchée par :

$$C_u^2(\beta) = C_{uv}^2 \cos^2 \beta + C_{uh}^2 \sin^2 \beta$$

où β est l'inclinaison de la contrainte principale majeure par rapport à l'axe d'anisotropie, C_{uv} la cohésion non drainée dans un essai de compression sur éprouvette verticale ; C_{uh} la cohésion non drainée dans un essai de compression sur éprouvette horizontale.

L'angle β est défini par la relation (en déformation plane) :

$$\tan(2\beta) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Le modèle de Tresca anisotrope (IMOD=40) est un modèle élastoplastique parfaitement plastique.

La partie élastique du modèle est supposée linéaire orthotrope de révolution. Elle est donc décrite par les mêmes paramètres que le modèle élastique linéaire orthotrope (IMOD=2) présenté ci-dessus.

Dans l'hypothèse des déformations planes, le critère s'écrit alors :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2 C_u(\beta) \leq 0$$

La loi d'écoulement est associée.

Note : les cohésions non drainées C_{uv} et C_{uh} sont supposées varier en fonction de la profondeur de manière affine :

$$C_{uv} = C_{uv}(0) + a_v z$$

$$C_{uh} = C_{uh}(0) + a_h z$$

Paramètres du modèle de Tresca anisotrope (IMOD=40) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young dans le plan d'isotropie E_h (E1) [Pa] ;
- module d'Young dans la direction de l'axe E_v (E2) [Pa] ;
- coefficients de Poisson dans le plan d'isotropie ν_h (P1) [-] et transverse ν_v (P2) [-] ;
- module de cisaillement G (G2) [Pa] ;
- angle θ entre l'horizontale et le plan d'isotropie (TETA) [degrés] ;
- cohésion « verticale » $C_{uv}(0)$ pour $z = 0$ (A1) [Pa] ;
- gradient de cohésion verticale dans la direction verticale a_v (B1) [$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$] ;
- cohésion « horizontale » $C_{uh}(0)$ pour $z = 0$ (A2) [Pa] ;
- gradient de cohésion « horizontale » dans la direction verticale a_h (B2) [$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$].

3.2.20. Matériau renforcé : modèle de de Buhan et Sudret (IMOD=43)

Ce modèle a été développé par de Buhan et Sudret (2000) pour modéliser le rôle des inclusions de renforcement linéiques (clous, boulons, micropieux, etc.). Le principe est de remplacer le milieu hétérogène formé par l'ensemble du sol et des inclusions par un milieu homogène équivalent constitué par la superposition de deux milieux continus, ayant la même cinématique mais doté chacun d'un champ d'efforts intérieurs, les contraintes classiques pour la phase qui joue le rôle de matrice, et un champ de contrainte uniaxial dans la direction des inclusions pour la phase qui joue le rôle de renforcement. Les inclusions introduisent une raideur supplémentaire en traction-compression dans une direction privilégiée et il n'y a pas de prise en compte des effets de flexion des inclusions.

La plasticité du sol et celles des inclusions sont gérées séparément, ce qui conduit à un comportement global écrouissable. Le modèle 43 correspond à l'association du modèle de Drucker Prager sans écrouissage pour le sol (voir IMOD=13 ci-dessus) et d'un modèle élastique-parfaitement plastique pour les inclusions (dans lesquelles l'état de contrainte est caractérisé par un scalaire unique). On est donc amené à donner d'une part les informations décrivant le comportement du sol avant renforcement, d'autre part les caractéristiques mécaniques et géométriques des boulons et de leur disposition. Le solveur permet de définir deux familles d'inclusions orientées dans des directions différentes, ou présentant des caractéristiques mécaniques différentes. Le nombre de familles d'inclusions est donné par le paramètre NRENF (égal à 0, 1 ou 2). Les familles d'inclusions sont aussi appelées "phases de renforcement" dans le manuel de référence du solveur CESAR, conformément à la terminologie adoptée par les auteurs du modèle.

Pour chaque famille d'inclusions, l'utilisateur doit donner le module d'Young du matériau constitutif des inclusions (K), l'aire de la section d'une inclusion (SA), la contrainte limite en traction simple du matériau constitutif des inclusions (S), le rapport entre la limite en traction et la limite en compression (ETA). Les autres paramètres sont liés à la disposition géométrique des inclusions. Le logiciel permet de prendre en compte quatre dispositions géométriques, la disposition choisie étant définie par le paramètre TYP (voir paragraphes suivants).

Renforcement homogène (TYP=0)

Les inclusions sont toutes parallèles à une direction donnée

- En déformation plane ou en contrainte plane, cette direction est définie par l'angle ALPHA qu'elle forme avec l'axe horizontal Ox ; la densité du dispositif est caractérisée par la fraction volumique des inclusions FV, obtenue en faisant le produit du nombre d'inclusions par mètre carré et de l'aire de la section d'une inclusion (ou en calculant la somme des aires des sections des inclusions placées dans une surface donnée perpendiculaire à leur direction divisée par l'aire de cette surface) ;

- En déformation axisymétrique, la direction commune est nécessairement parallèle à l'axe de révolution et le seul paramètre à donner est la fraction volumique FV ;

- En condition tridimensionnelle, cette direction est définie par deux angles A et B (dans l'intervalle $[-90 ; 90^\circ]$). L'angle A est l'angle entre la projection de la direction de renforcement sur le plan $z=0$ et l'axe des x (longitude) ; B est l'angle entre la direction de renforcement et l'horizontale (latitude). Un vecteur unitaire de la direction de renforcement est donc : $(\cos A \cos B, \sin A \cos B, \sin B)$.

La densité du dispositif est caractérisée par la fraction volumique des inclusions FV, obtenue en faisant le produit du nombre d'inclusions par mètre carré et de l'aire de la section d'une inclusion (ou en calculant la somme des aires des sections des inclusions placées dans une surface donnée perpendiculaire à leur direction divisée par l'aire de cette surface).

Renforcement radial (TYP=1)

Les inclusions sont placées dans des plans perpendiculaires à une droite donnée Δ . Dans chaque plan, elles convergent vers l'intersection du plan avec Δ . La densité du dispositif de renforcement varie comme l'inverse de la distance à cette droite.

- En déformation plane ou en contrainte plane, la droite Δ est perpendiculaire au plan du maillage et on donne les coordonnées XC et YC du point vers lequel les inclusions convergent. La densité du dispositif de renforcement varie comme l'inverse de la distance à ce point. L'utilisateur doit fournir la fraction volumique des inclusions à une distance unité du centre du dispositif FVR1.
- En déformation axisymétrique, la droite Δ est l'axe de symétrie de révolution, et l'utilisateur doit seulement fournir la fraction volumique des inclusions à une distance unité de l'axe FVR1.
- En condition tridimensionnelle, La droite Δ est définie par un point et une direction. On donne alors les coordonnées X, Y, Z d'un point de l'axe et les deux angles A et B (dans l'intervalle $[-90 ; 90^\circ]$) donnant la direction de l'axe de symétrie. A désigne l'angle entre la projection de l'axe sur le plan $z=0$ et l'axe des x (longitude) ; B est l'angle entre la direction de l'axe et l'horizontale (latitude). Un vecteur unitaire de l'axe de symétrie est donc $(\cos A \cos B, \sin A \cos B, \sin B)$. Il faut également fournir la fraction volumique FVR1 des inclusions à une distance unité de l'axe de symétrie.

Renforcement divergent cylindrique (TYP=2)

Les inclusions sont placées suivant les génératrices de cônes d'axe Δ et dont l'angle d'ouverture est donné. La fraction volumique des inclusions varie en $1/r$, où r est la distance à l'axe de symétrie.

- Ce type de renforcement ne peut pas être modélisé en déformation plane ni en contrainte plane ;
- En condition axisymétrique, l'axe du cône Δ est nécessairement l'axe de symétrie de révolution, et les inclusions font un angle donné avec l'axe ; on donne l'angle BETA entre l'axe de symétrie Oz et la direction des inclusions, ainsi que la fraction volumique FVR1 à distance unité de l'axe de symétrie de révolution ;
- En condition tridimensionnelle, l'axe du cône Δ est déterminé par la donnée des coordonnées d'un point de (X, Y, Z) et des deux angles A et B dans l'intervalle $[-90 ; 90^\circ]$ donnant la direction de l'axe de symétrie. A désigne l'angle entre la projection de l'axe sur le plan $z=0$ et l'axe des x (longitude) ; B est l'angle entre la direction de l'axe et l'horizontale (latitude) ; il faut également fournir la fraction volumique FVR1 à distance unité de l'axe de symétrie de révolution.

Renforcement divergent sphérique (TYP=3)

Les inclusions sont placées suivant des rayons qui convergent en un point. La fraction volumique varie comme l'inverse du carré de la distance à ce point.

- Ce type de renforcement ne peut pas être modélisé en déformation plane ni en contrainte plane ;
- En condition axisymétrique, le point vers lequel les inclusions convergent est nécessairement un point de l'axe de symétrie de révolution : on donne sa coordonnée verticale ZC, et la fraction volumique FV à distance unité de ce point.
- En condition tridimensionnelle, on donne les coordonnées (XC, YC, ZC) du point de convergence des inclusions, et la fraction volumique FVR1 à distance unité de ce point.

Pour les calculs bidimensionnels, le modèle comporte au total 21 paramètres récapitulés ci-dessous.

Paramètres du modèle de de Buhan et Sudret (IMOD=43) en condition bidimensionnelle				
Paramètres décrivant le sol avant renforcement (modèle de Drucker-Prager) :				
<ul style="list-style-type: none"> • masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ; • module d'Young ($YOUNG$) [Pa] ; • coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-]; • cohésion c (C) [Pa] • angle de frottement ϕ (PHI) [degrés] ; • angle de dilatace ψ (PSI) [degrés]. 				
Paramètres décrivant le dispositif de renforcement :				
<ul style="list-style-type: none"> • nombre de familles d'inclusions (NRENF) ; • paramètres de la 1^{re} famille d'inclusions TYP1, K1, SA1, S1, ETA1, X1, Y1, FV1 ; • paramètres de la 2^e famille d'inclusions TYP2, K2, SA2, S2, ETA2, X2, Y2, FV2. 				
<p>Les paramètres K_i, SA_i, S_i et ETA_i sont respectivement, pour la famille d'inclusions i, le module du matériau constitutif des inclusions, l'aire de la section d'une inclusion, la contrainte limite en traction simple du matériau constitutif des inclusions et le rapport entre contrainte limite en compression et limite en traction.</p> <p>La correspondance entre les paramètres X_i, Y_i et FV_i avec ceux décrits ci-dessus, en fonction de la valeur de l'indicateur TYP (TYP1 ou TYP2) et de la valeur de l'indicateur INAT (qui vaut 1 en déformation plane, 2 en déformation axisymétrique et 3 en contraintes planes) est fournie par le tableau ci-dessous, dans lequel la notation * indique qu'un paramètre n'intervient pas dans le calcul pour les valeurs de INAT et de TYP choisies :</p>				
	TYP	X	Y	FV
INAT=1 ou 3 (déformation plane ou contraintes planes)	0	ALPHA	*	FV fraction volumique
	1	XC	YC	FVR1 fraction volumique à distance unité de l'axe de symétrie
	2	valeurs de TYP exclues si INAT=1 ou 3		
	3			

INAT =2 calcul axisymétrique	0	*	*	FV fraction volumique
	1	*	*	FVR1 fraction volumique à distance unité de l'axe de symétrie
	2	BETA	*	FVR1 fraction volumique à distance unité de l'axe de symétrie
	3	ZC	*	FVR1 fraction volumique à distance unité du point de convergence

Pour les calculs tridimensionnels, le modèle comporte au total 31 paramètres récapitulés ci-dessous.

Paramètres du modèle de de Buhan et Sudret (IMOD=43) en condition tridimensionnelle							
Paramètres décrivant le sol avant renforcement (modèle de Drucker-Prager) :							
<ul style="list-style-type: none"> • masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ; • module d'Young (Y_{OUNG}) [Pa] ; • coefficient de Poisson ν (POISS) [-]; • cohésion c (C) [Pa] • angle de frottement φ (PHI) [degrés] ; • angle de dilatance ψ (PSI) [degrés]. 							
Paramètres décrivant le dispositif de renforcement :							
<ul style="list-style-type: none"> • le nombre de familles d'inclusions (NRENF) ; • paramètres de la 1^{re} famille d'inclusions TYP1, K1, SA1, S1, ETA1, X1, Y1, Z1, A1, B1, C1, FV1 ; • paramètres de la 2^e famille d'inclusions TYP2, K2, SA2, S2, ETA2, X2, Y2, Z2, A2, B2, C2, FV2. 							
<p>Les paramètres K_i, SA_i, S_i et ETA_i sont respectivement, pour la famille d'inclusions i, le module du matériau constitutif des inclusions, l'aire de la section d'une inclusion, la contrainte limite en traction simple du matériau constitutif des inclusions et le rapport entre contrainte limite en compression et limite en traction.</p>							
<p>La correspondance entre les paramètres X_i, Y_i, Z_i, A_i, B_i, C_i et FV_i avec ceux décrits ci-dessus, en fonction de la valeur de l'indicateur TYP (TYP1 ou TYP2) est fournie par le tableau ci-dessous, dans lequel la notation * indique qu'un paramètre n'intervient pas dans le calcul pour les valeurs de TYP choisies :</p>							
TYP	A	B	C	X	Y	Z	FV
0	A1	B1	*	*	*	*	FV fraction volumique des inclusions
1	A1	B1	*	X1	Y1	Z1	FVR1 fraction volumique à distance unité de l'axe de symétrie
2	A1	B1	C1	X1	Y1	Z1	FVR1 fraction volumique à distance unité de l'axe du cône
3	*	*	*	X1	Y1	Z1	fraction volumique à distance unité du point de convergence

3.2.21. Modèle de Willam-Warnke standard, 3 paramètres (IMOD=47)

Le critère de Willam-Warnke peut être considéré comme un critère de type Drucker-Prager adapté au béton dans le domaine des faibles confinements. Par rapport au critère de Drucker-Prager, le critère dépend de plus de l'angle de Lode θ . Ce modèle présente un fonctionnement différent selon la valeur du paramètre κ : si $\kappa=0$, le comportement est parfaitement plastique ; si $\kappa \neq 0$, le comportement est écrouissable.

Comportement élastoplastique parfaitement plastique ($\kappa=0$)

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν .

Le critère de rupture est donné par l'expression :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} + f(\theta) (\sigma - \rho_0)$$

où σ désigne la trace du tenseur des contraintes, et où le coefficient de frottement $f(\theta)$ est donné par :

$$f(\theta) = \frac{u+v}{w} \text{ avec } \begin{cases} u = 2 f_c (f_c^2 - f_t^2) \cos\theta \\ v = f_c (2 f_c - f_t) \sqrt{4 (f_c^2 - f_t^2) \cos^2\theta + 5 f_t^2 - 4 f_c f_t} \\ w = 4 (f_c^2 - f_t^2) \cos^2\theta + (f_c - 2 f_t)^2 \end{cases}$$

$f_c = f(60^\circ)$: coefficient de frottement sur le méridien de compression

$f_t = f(0^\circ)$: coefficient de frottement sur le méridien de traction

Les coefficients ρ_0 , f_c et f_t sont calculés par le code en fonction des valeurs de la résistance en compression simple σ_c , de la résistance en traction simple, σ_t et de la résistance en compression biaxiale, σ_{bc} .

La loi d'écoulement est associée.

Note 3 : si $\kappa=0$ les valeurs des paramètres A_0 et B_0 sont ignorées.

Comportement avec écrouissage ($\kappa \neq 0$)

Le critère de rupture s'écrit de la manière suivante :

$$f(\sigma, z) = \tau + f(\theta) (\sigma - z\rho_0)$$

Il comporte donc quatre paramètres au lieu de trois : ρ_0 , f_c , f_t et z .

La règle d'écoulement est associée :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left[\frac{s}{2\tau} + \frac{\delta}{3} \mathbf{1} \right]$$

Le paramètre d'écrouissage z est relié à la variable d'écrouissage γ_{eq}^p par la relation suivante :

$$z = A_0 - (A_0 - B_0) (1 - \exp[-\kappa \gamma_{eq}^p])$$

où les variations de $d\gamma_{eq}^p$ sont données par $d\gamma_{eq}^p = d\lambda$.

Note 4 : si $A_0 > B_0$, l'écrouissage est positif ; il est négatif dans le cas contraire.

Note 5 : le modèle ne permet pas de rendre compte du comportement plastique contractant. On utilisera pour cela le modèle de Willam-Warnke modifié.

Paramètres du modèle de Willam-Warnke standard (IMOD=47) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}];

- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-] ;
- résistance en compression simple, σ_c (FC) [Pa] ;
- résistance en traction simple, σ_t (FT) [Pa] ;
- résistance en compression biaxiale, σ_{bc} (FBC) [Pa] ;
- limite d'élasticité initiale (relative) A_0 (A0) [-] ;
- limite d'élasticité finale (relative) B_0 (B0) [-] ;
- facteur exponentiel d'érouissage κ (KAPPA) [-].

3.2.22. Modèle de Willam-Warnke modifié, 4 paramètres (IMOD=48)

La modification de ce critère consiste à rendre compte de manière plus réaliste de la forme courbée des méridiens. Il est utilisé pour modéliser le comportement écrouissable ($H > 0$) et adoucissant du béton ($H < 0$) à partir d'un domaine d'élasticité initiale qui comprend les points de charge en compression simple, compression biaxiale et traction simple. Il permet de rendre compte du comportement plastiquement contractant dans les domaines des pressions hydrostatiques importantes, et du comportement plastiquement dilatant dans les domaines des faibles pressions hydrostatiques. Ce modèle a été programmé dans le cas plastique parfait et dans le cas écrouissable.

Comportement élastoplastique parfaitement plastique ($\kappa=0$)

La partie élastique de la loi de comportement est linéaire et isotrope, caractérisée par la donnée du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν . Le critère de rupture est donné par l'expression :

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta) \frac{(\sigma - \rho_0) (\sigma + 2p_{cr} - \rho_0)}{2p_{cr}}$$

où p_{cr} est une constante strictement positive dans le cas de la plasticité parfaite.

Les coefficients ρ_0 , p_{cr} , f_c et f_t sont calculés par le code en fonction des valeurs de la résistance en compression simple σ_c , de la résistance en traction simple, σ_t et de la résistance en compression biaxiale, σ_{bc} , et du résultat d'un essai triaxial, caractérisé par les trois contraintes principales à la rupture S_1 , S_2 et S_3 (on a donc nécessairement $S_2=S_1$ ou $S_2=S_3$). La loi d'écoulement est associée.

Comportement avec écrouissage ($\kappa \neq 0$)

Le critère de rupture est défini par la même expression :

$$f(\sigma) = \tau + f(\theta) \frac{(\sigma - \rho_0) (\sigma + 2p_{cr} - \rho_0)}{2p_{cr}}$$

mais p_{cr} est désormais susceptible de varier.

La règle d'écoulement est associée.

Le paramètre d'écrouissage z est relié à la variable d'écrouissage γ_{eq}^p par la relation suivante :

$$p_{cr} = p_{cr}^0 \{ A_0 - (A_0 - B_0) (1 - \exp[-\kappa \gamma_{eq}^p]) \}$$

où les variations de $d\gamma_{eq}^p$ sont données par $d\gamma_{eq}^p = d\lambda$.

Note 6 : si $A_0 > B_0$, l'écrouissage est positif ; il est négatif dans le cas contraire.

Paramètres du modèle de Willam Warnke modifié (IMOD=48) :

- masse volumique (ρ_0) [kg m^{-3}] ;
- module d'Young ($YOUNG$) [Pa] ;
- coefficient de Poisson ν ($POISS$) [-] ;
- résistance en compression simple, σ_c (FC) [Pa] ;
- résistance en traction simple, σ_t (FT) [Pa] ;
- résistance en compression biaxiale, σ_{bc} (FBC) [Pa] ;
- contraintes à la rupture lors d'un essai triaxial S_1, S_2, S_3 (SIG1, SIG2, SIG3) [Pa] ;
- limite d'élasticité initiale (relative) $A_0(A0)$ [-] ;

- limite d'élasticité finale (relative) $B_o(B0)$ [-] ;
- facteur exponentiel d'écroissage κ (ΚΑΡΡΑ) [-].

3.2.23. Modèle de gonflement de Bultel (1999) (IMOD=98)

p.m.

F. Bultel (1999) a introduit un modèle élastique anisotrope non linéaire – parfaitement plastique qui permet de prendre en compte une déformation volumique liée à la décroissance de la contrainte moyenne.

Paramètres du modèle de gonflement de Bultel (IMOD=98) :

- pression de gonflement ;
- indice de gonflement ;
- anisotropie de gonflement ;
- n_x, n_y, n_z

3.3. Modèles « à composantes »

3.3.1. Principe

Pour permettre à l'utilisateur de tester l'influence des choix qu'il est amené à faire pour représenter le comportement des matériaux (et faciliter la programmation de nouveaux modèles), on a introduit une nouvelle présentation des lois de comportement, dans laquelle l'utilisateur est invité à définir le comportement comme la combinaison d'une élasticité choisie dans une liste prédéfinie (élasticité linéaire ou non, isotrope ou non), et d'un ou plusieurs mécanismes plastiques (défini chacun par un critère, une loi d'écoulement, et éventuellement une loi d'écrouissage).

Chacun de ces éléments est à choisir dans une liste de modèles préexistants, mais la possibilité de combiner les éléments du comportement permet de multiplier les lois de comportement utilisables.

Les modèles en question sont disponibles pour les éléments de massif, en 2D et en 3D.

Ils sont utilisables avec les modules MCNL, TCNL, CSNL (et les modèles élastiques linéaires hétérogènes sont utilisables avec DYN1).

Pour le moment, ces modèles ne sont pas utilisables avec les autres modules de mécanique (MEXO, MCCI, MPNL, FLAM, SUMO).

3.3.2. Mise en œuvre dans le jeu de données

En pratique, leur utilisation consiste à décrire dans le jeu de données, le modèle de comportement sous la forme d'une succession de lignes, chacune associée à un aspect de la loi considérée. L'interface graphique permet d'utiliser cette combinaison de modèles.

Dans le jeu de données, la nature de l'information fournie par chaque ligne est indiquée par un mot-clé de 3 ou 4 lettres (ELAS pour la loi élastique, RHO pour la masse volumique, etc.). Ce mot-clé est suivi d'un indicateur entier et d'un nombre variable de valeurs numériques. Autrement dit, on éclate l'indicateur IMOD en une série d'indicateurs entiers relatifs à la loi d'élasticité, au(x) critère(s) et au(x) potentiel(s) plastique(s), aux éventuelles familles de renforcement.

De manière plus précise, on associe le modèle à la valeur $IMOD = 10000$.

Pour un problème mécanique, la seule information indispensable concerne la loi d'élasticité, qui permet de calculer une matrice de rigidité. Les autres informations sont optionnelles : il n'y a pas lieu de préciser de mécanisme plastique pour un matériau élastique.

Les mots-clés reconnus sont :

- RHO : masse ou poids volumique,
- ELAS : type d'élasticité,
- CRT, POT, ECR : critère, potentiel et loi d'écrouissage du 1er mécanisme plastique,
- CRT2, POT2, ECR2 : description du deuxième mécanisme plastique éventuel,
- RENF : prise en compte par homogénéisation d'inclusions de renforcement, suivant la même technique que pour le modèle « classique » $IMOD=43$ (cf. 3.2).
- NDR : indicateur pour réaliser des calculs en condition non drainée.

Les mots-clés sont lus dans cet ordre : RHO, ELAS, CRT, POT, ECR, CRT2, POT2, ECR2, NDR. La liste des données peut omettre un ou plusieurs mots-clés, mais pas modifier l'ordre dans lequel ils sont donnés.

A titre d'exemple, en déformation plane, pour un sol dont le comportement est décrit par le modèle de Mohr Coulomb avec $\rho = 20 \text{ kN/m}^3$; $E = 100 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; $c = 150 \text{ kPa}$; $\varphi = \psi = 25 \text{ degrés}$, les données figurant dans le jeu de données sont, en adoptant comme unité des contraintes le MPa, et dans le cadre des modèles « classiques » du paragraphe 3.2 :

```
sol
10 1 0.02 100. 0.3 0.15 25. 25.
```

Les données à fournir pour le même modèle et les mêmes données, dans le contexte des modèles à composantes, sont les suivantes :

```
sol
10000 1
RHO 0.02
ELAS 0 100. 0.3
CRT 4 0.15 25.
```

La ligne commençant par le mot-clé RHO permet de renseigner la masse volumique.

La ligne commençant par ELAS est relative à la loi élastique : l'indicateur 0 qui suit le mot clé ELAS indique que la loi est élastique linéaire isotrope, et suivi des deux paramètres E et ν .

La ligne commençant par CRT indique que l'on utilise un modèle plastique et définit le critère choisi. L'indicateur entier prend la valeur 4 pour le critère de Mohr Coulomb ; il est suivi des valeurs de c et ϕ . En l'absence de données supplémentaires, la loi d'écoulement est associée et le matériau parfaitement plastique (pas d'écrouissage). Pour définir un modèle dans lequel l'angle de dilatance ψ est différent de l'angle de frottement ϕ , il faudrait fournir une indication supplémentaire, sur une nouvelle ligne (commençant par le mot-clé POT).

De manière générale, pour le critère, les données sont introduites sous la forme

```
CRT ICRIT paramètres
```

Par défaut, si aucun potentiel n'est explicitement indiqué, la loi d'écoulement est associée. Pour donner un potentiel différent du critère, on ajoute une ligne de la forme :

```
POT IPOT paramètres
```

De manière analogue, si aucune loi d'écrouissage n'est indiquée, on considère que le modèle est élastique-parfaitement plastique. Dans le cas contraire, les paramètres du critère définissant le domaine élastique sont susceptibles de varier en fonction des chargements subis.

L'exemple type est celui du modèle Cam-Clay : le domaine élastique est une ellipse dans le plan (p,q). En compression simple, lorsque le chargement devient suffisamment grand, des déformations volumiques irréversibles apparaissent et le domaine élastique s'étend. Le paramètre M qui définit la forme du domaine (l'excentricité de l'ellipse) n'évolue pas, mais le paramètre p_c (la longueur de son grand axe) augmente.

Une façon simple de représenter cette évolution consiste à se donner une loi reliant le paramètre p_c à la déformation volumique plastique. On adopte souvent une relation exponentielle, du type :

$$p_c = p_c^0 \exp \left[- \frac{(1+e_0) \varepsilon_v^p}{(\lambda-\kappa)} \right]$$

C'est cette loi qui gouverne l'évolution du paramètre p_c , et qui est appelée loi d'écrouissage. On imagine que l'on pourrait définir une relation plus complexe entre p_c et la déformation plastique, ou bien souhaiter faire varier l'autre paramètre du critère M. On peut donc associer différentes lois d'écrouissage à un même critère. Du point de vue du format des données, on ajoutera au jeu de données une ligne du type

```
ECR IECR paramètres
```

Dans le cas de la loi précédente par exemple, il faudra fournir les valeurs des trois paramètres supplémentaires λ , κ , e_0 .

3.3.3. Modèles élastiques

CESAR propose une gamme de modèles élastiques linéaires ou non, isotropes ou non, avec des caractéristiques homogènes ou hétérogènes d'un point à l'autre du groupe d'éléments auquel le modèle est affecté.

Dans le cas des modèles élastiques non linéaires, les modèles donnent en général une expression des modules d'élasticité tangents en fonction des contraintes (et/ou des déformations). Le traitement retenu, qui s'est avéré suffisant pour les applications géotechniques jusqu'à présent, consiste à actualiser les modules élastiques au début de chaque incrément, en fonction de l'état de contraintes ou de déformations obtenu à la fin de l'incrément précédent.

3.3.3.1. Elasticité linéaire isotrope (IELAS=0)

La formulation de cette loi élastique est identique à celle du modèle IMOD=1 (cf 3.2.1), mais elle peut être combinée avec un mécanisme de plasticité.

Formulation : $\varepsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1}$

Paramètres pour le modèle élastique linéaire isotrope (IELAS=0):

- module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]

3.3.3.2. Elasticité linéaire isotrope / modules variant avec la profondeur (IELAS=1)

Il est souvent admis que les modules élastiques augmentent avec la profondeur, à cause de l'augmentation progressive de la contrainte verticale, et de la densification qui peut en résulter. Les profils pressiométriques sont généralement en accord avec cette hypothèse. CESAR propose de prendre en compte simplement une variation linéaire du module d'Young E et éventuellement du coefficient de Poisson avec la profondeur.

Formulation :

$$E = E_0 + \Delta E z \quad ; \quad \nu = \nu_0 + \Delta \nu z$$

où z représente la coordonnée du point considéré suivant la verticale ascendante.

Paramètres pour le modèle élastique linéaire isotrope avec modules variant linéairement avec la profondeur (IELAS=1):

- module d'Young pour z=0, E_0 (YOUNGZ) [Pa]
- coefficient de Poisson pour z=0, ν_0 (POISSZ) [-]
- gradient du module d'Young suivant la verticale ascendante ΔE (DELTAYG) [Pa/m]
- gradient du coefficient de Poisson suivant la verticale ascendante $\Delta \nu$ (DELTAP) [m⁻¹]

NB important : Pour représenter une augmentation de raideur lorsque la profondeur augmente (c'est-à-dire lorsque z diminue), il faut donner une valeur négative au gradient du module : $\Delta E < 0$.

3.3.3.3. Elasticité linéaire isotrope / E en puissance de z (IELAS=8)

Ce modèle est une variante du précédent, dans laquelle la variation du module avec la profondeur n'est pas linéaire. La formulation raccorde une valeur de module constante E_0 pour les points situés au-dessus d'une altitude h , et une variation suivant une loi puissance au-dessous de cette altitude.

$$\nu = \nu^{\text{te}} \quad ; \quad E = E_0 + k \langle h-z \rangle^\alpha \text{ avec } \langle h-z \rangle = \frac{h-z+|h-z|}{2}$$

où z représente la coordonnée suivant la verticale ascendante.

$\langle h-z \rangle$ est la partie positive de $h-z$:

$$\langle h-z \rangle = h-z \text{ si } h > z \quad ; \quad \langle h-z \rangle = 0 \text{ si } h \leq z$$

E vaut donc $E_0 + k (h-z)^\alpha$ si z est inférieure à h , et E_0 si z est supérieur à h .

Paramètres pour le modèle élastique linéaire isotrope avec E en puissance de z (IELAS=8):

- module d'Young pour $z=h$, E_0 (YOUNGZ) [Pa]
- coefficient de variation du module d'Young k (K) [Pa. m $^{-\alpha}$]
- ordonnée de référence h (H) [m]
- exposant α [-]
- coefficient de Poisson ν [-]

NB : Si l'on modifie l'origine des coordonnées verticales (translation du maillage par exemple), il faut adapter la valeur de h .

NB2 : Pour cette loi, pour obtenir un module qui augmente quand la profondeur augmente (c'est-à-dire dans z diminue), il faut donner au paramètre k une valeur **positive**.

3.3.3.4. Elasticité linéaire isotrope transverse (IELAS=2)

Dans CESAR, les axes locaux liés aux directions attachées à la matière sont notés 1, 2, 3. L'axe d'orthotropie est l'axe 2, c'est-à-dire que le comportement est isotrope dans le plan perpendiculaire à la direction e_2 . Dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, le comportement se formule de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_1/E_1 & -\nu_2/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1/E_1 & 1/E_1 & -\nu_2/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_2/E_2 & -\nu_2/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_1)/E_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

Le comportement est donc défini par les cinq paramètres matériels E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 et G , d'une part, et par les paramètres qui définissent l'orientation du repère lié au matériau par rapport au référentiel (e_x, e_y, e_z) dans lequel on fait le calcul: il faut définir un angle en déformation plane et deux angles pour un calcul tridimensionnel.

Paramètres du modèle élastique linéaire isotrope transverse (IELAS=2)

- module d'Young dans le plan d'isotropie E_1 ($E1$) [Pa]
- module d'Young dans la direction de l'axe E_2 ($E2$) [Pa]
- coefficients de Poisson dans le plan d'isotropie ν_1 ($P1$) [-] et transverse ν_2 ($P2$) [-]
- module de cisaillement G (G) [Pa]
- en condition bidimensionnelle :
 - angle θ entre l'horizontale et le plan d'isotropie ($TETA$) [degrés]
- en condition tridimensionnelle :
 - angle θ entre le premier axe du repère global Ox et l'axe $Ox^{(TETA)}$ [degrés]
 - angle φ entre l'axe Ox du plan horizontal et le plan isotrope (PHI) [degrés]

3.3.3.5. Elasticité isotrope transverse : fractures en chevrons (IELAS=9)

Ce modèle a été proposé par A. Pouya pour tenir compte de l'influence des fractures sur le comportement mécanique au voisinage d'une excavation dans les argilites. Le creusement d'une galerie provoque l'apparition d'une zone endommagée par l'excavation (Excavation Damaged Zone ou EDZ), parcourue par des fractures qui présentent une géométrie tridimensionnelle complexe.

Les modèles IELAS=9/10 représentent une géométrie simplifiée qui correspond à des fractures présentant une géométrie conique (symétrie de révolution autour de l'axe de la galerie et inclinaison constante par rapport à l'axe). Par ailleurs, l'espacement entre les fractures est également supposé constant, et égal à D .

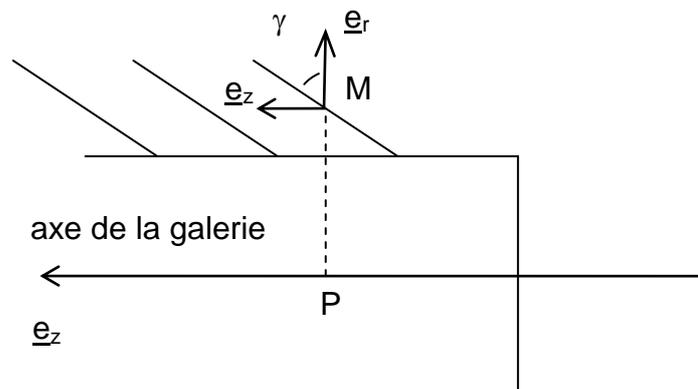


Figure 1 – Définition de la géométrie des fractures en chevrons (NB sur la figure l'axe de la galerie est horizontal mais dans un calcul CESAR axisymétrique, l'axe de révolution est l'axe vertical)

Pour des fractures orientées comme sur la figure (avec le sommet des cônes du côté du front de taille de la galerie), l'angle γ prend une valeur positive. Si on change l'orientation de l'axe de la galerie, la valeur de γ correspondant à la même géométrie de fractures est négative.

L'influence des chevrons sur le comportement mécanique du massif est prise en compte de manière homogénéisée, en attribuant au sol fracturé un comportement équivalent anisotrope, dans des directions qui dépendent de la position du point considéré.

La loi proposée est une loi élastique isotrope transverse, avec cette particularité que la direction locale de l'axe de symétrie varie d'un point à l'autre du massif. Elle prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

où la direction de l'axe de symétrie de révolution est celle de l'axe z, et où les coefficients se déduisent des caractéristiques élastiques de la roche saine E et ν , et des caractéristiques des fractures par les relations suivantes :

$$s_{11} = 1/E ; s_{12} = s_{13} = -\nu/E ; s_{33} = \frac{1}{E} + \frac{1}{k_n D} ; s_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E} + \frac{1}{k_t D} ; s_{66} = 2(s_{11}-s_{12}) = \frac{2(1+\nu)}{E}$$

Dans ces relations, k_n et k_t désignent respectivement les raideurs normale et tangentielle des fractures.

La loi proposée est de la même forme que celle du paragraphe 3.3.3.4 (IELAS=2), si l'on identifie la direction 2 du premier modèle à la direction z du deuxième, et en adoptant les valeurs suivantes :

$$E_1 = E ; \nu_1 = \nu ; E_2 = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{k_n D}} ; \nu_2 = \nu \frac{E_2}{E} = \frac{\nu}{1 + \frac{E}{k_n D}} ; G = \frac{1}{\frac{2(1+\nu)}{E} + \frac{1}{k_t D}}$$

Si l'indicateur IELAS prend la valeur 9, on donne les cinq paramètres habituels ($E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$), calculés avec les formules précédentes. Si l'indicateur IELAS vaut 10, on donne les cinq paramètres (E, ν, k_n, k_t, D), et le code fait lui-même le calcul des modules homogénéisés.

Il faut d'autre part définir l'orientation du plan d'isotropie ou de l'axe de symétrie.

en 2D : γ est l'angle entre la radiale e_r et le plan d'isotropie (tangent localement aux chevrons)

en 3D : on donne les coordonnées (x,y,z) d'un point de l'axe de symétrie, α, β deux angles définissant la direction de cet axe (l'axe a pour vecteur directeur $(\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$), et l'angle γ entre la radiale et le plan d'isotropie.

Paramètres pour le modèle isotrope transverse pour un milieu fracturé en chevrons (IELAS=9)

- module d'Young dans le plan d'isotropie E_1 (E1) [Pa]
- module d'Young dans la direction de l'axe E_2 (E2) [Pa]
- coefficients de Poisson dans le plan d'isotropie ν_1 (P1) [-] et transverse ν_2 (P2) [-]
- module de cisaillement G (G) [Pa]

En deux dimensions (calcul axisymétrique) :

- angle entre la direction radiale e_r et le plan d'isotropie γ [deg]

En trois dimensions :

- Coordonnées d'un point de l'axe de la galerie X,Y,Z [m]
- Angles définissant l'orientation de l'axe α, β [degrés]
- angle entre la direction radiale e_r et le plan d'isotropie γ [deg]

Paramètres pour le modèle isotrope transverse homogénéisé pour un milieu fracturé en chevrons (IELAS=10)

- module d'Young de la roche intacte (E) [Pa]
- coefficients de Poisson de la roche intacte ν [-]
- raideur normale et tangentielle des fractures k_n et k_t [Pa/m]
- Distance entre deux fractures D [m]

En deux dimensions (calcul axisymétrique) :

- angle entre la direction radiale e_r et le plan d'isotropie γ [deg]

En trois dimensions :

- Coordonnées d'un point de l'axe de la galerie X, Y, Z [m]
- Angles définissant l'orientation de l'axe α, β [degrés]
- angle entre la direction radiale e_r et le plan d'isotropie γ [deg]

3.3.3.6. Elasticité isotrope transverse : fractures en chevrons non coniques (IELAS=11)

p.m. : Il s'agit d'une variante du modèle précédent, au sens où la matrice élastique locale est à nouveau isotrope transverse, avec une symétrie de révolution autour de l'axe de la galerie. Les fractures ne sont plus coniques, mais courbes.

3.3.3.7. Elasticité linéaire orthotrope (IELAS=14)

Le comportement élastique orthotrope correspond à des matériaux présentant trois plans de symétrie. Il existe alors un trièdre de vecteurs orthonormés ($\underline{e}_b, \underline{e}_h, \underline{e}_n$), que l'on peut supposer direct, tel que l'on ait (en notant $\varepsilon_{\alpha\beta} = \underline{e}_\alpha \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{e}_\beta$ et $\sigma_{\alpha\beta} = \underline{e}_\alpha \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_\beta$) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{bb} \\ \varepsilon_{hh} \\ \varepsilon_{nn} \\ 2\varepsilon_{bh} \\ 2\varepsilon_{hn} \\ 2\varepsilon_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_{hb}}{E_h} & -\frac{\nu_{nb}}{E_n} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{bh}}{E_b} & \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{nh}}{E_n} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{bn}}{E_b} & -\frac{\nu_{hn}}{E_h} & \frac{1}{E_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{bh}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{hn}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{bn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{bb} \\ \sigma_{hh} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{bh} \\ \sigma_{hn} \\ \sigma_{nb} \end{bmatrix}$$

avec, compte tenu des symétries des tenseurs d'élasticité (Salençon, 2007) :

$$\nu_{hb} E_b = \nu_{bh} E_h \quad ; \quad \nu_{nh} E_h = \nu_{hn} E_n \quad ; \quad \nu_{nb} E_b = \nu_{bn} E_n$$

Il n'y a pas de symétrie des « coefficients de Poisson » ν_{ij} et ν_{ji} et il faut donc prêter une attention particulière aux indices. D'autre part, la relation précédente permet d'interpréter relativement simplement les différents

coefficients : si l'on impose un état de contrainte uniforme défini par $\sigma_{\alpha\alpha} = \Sigma$ dans l'une des directions ($\alpha = b, h$ ou n), on obtient une déformation dans la même direction égale à $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \Sigma / E_{\alpha}$ et dans la direction transversale γ une déformation égale à $\varepsilon_{\gamma\gamma} = -\nu_{\gamma\alpha}\Sigma / E_{\gamma}$.

En pratique, pour le traitement numérique, c'est la relation inverse qu'on utilise (Assire et al, 2010) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{bb} \\ \sigma_{hh} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{bh} \\ \sigma_{hn} \\ \sigma_{nb} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{hn}\nu_{nh}}{E_h E_n} & \frac{\nu_{hb}+\nu_{nb}\nu_{hn}}{E_h E_n} & \frac{\nu_{nb}+\nu_{hb}\nu_{nh}}{E_h E_n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{bh}+\nu_{bn}\nu_{nh}}{E_b E_n} & \frac{1-\nu_{nb}\nu_{bn}}{E_b E_n} & \frac{\nu_{nh}+\nu_{nb}\nu_{bh}}{E_b E_n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{bn}+\nu_{bh}\nu_{hn}}{E_b E_h} & \frac{\nu_{hn}+\nu_{hb}\nu_{bn}}{E_b E_h} & \frac{1-\nu_{bh}\nu_{hb}}{E_b E_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{bh}\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{hn}\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{bn}\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{bb} \\ \varepsilon_{hh} \\ \varepsilon_{nn} \\ 2\varepsilon_{bh} \\ 2\varepsilon_{hn} \\ 2\varepsilon_{nb} \end{bmatrix}$$

avec $\Delta = \frac{1 - \nu_{hn}\nu_{nh} - \nu_{nb}\nu_{bn} - \nu_{bh}\nu_{hb} - 2 \nu_{hn}\nu_{nb}\nu_{bh}}{E_b E_h E_n}$

Note : dans le cas particulier des déformations planes (dans le plan $(\underline{e}_b, \underline{e}_h)$), on a :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{bb} \\ \sigma_{hh} \\ \sigma_{bh} \\ \sigma_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{hn}\nu_{nh}}{E_h E_n} & \frac{\nu_{hb}+\nu_{nb}\nu_{hn}}{E_h E_n} & 0 \\ \frac{\nu_{bh}+\nu_{bn}\nu_{nh}}{E_b E_n} & \frac{1 - \nu_{nb}\nu_{bn}}{E_b E_n} & 0 \\ 0 & 0 & G_{bh} \Delta \\ \frac{\nu_{bn}+\nu_{bh}\nu_{hn}}{E_b E_h} & \frac{\nu_{hn}+\nu_{hb}\nu_{bn}}{E_b E_h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{bb} \\ \varepsilon_{hh} \\ 2\varepsilon_{bh} \end{bmatrix}$$

Note 2 : Pour que la forme quadratique définissant l'énergie élastique soit définie positive, il est nécessaire que les paramètres vérifient la condition suivante :

$$1 - \nu_{bn}\nu_{nh}\nu_{hb} - \nu_{bh}\nu_{hn}\nu_{nb} - \nu_{bh}\nu_{hb} - \nu_{hn}\nu_{nh} - \nu_{nb}\nu_{bn} > 0$$

ou encore $\Delta > 0$

Dans le cas tridimensionnel, on donne les trois modules E_b, E_h, E_n , les trois coefficients de Poisson $\nu_{bh}, \nu_{hn}, \nu_{bn}$, les trois modules de cisaillement G_{bh}, G_{hn}, G_{bn} , et trois angles permettant d'orienter le repère local $(\underline{e}_b, \underline{e}_h, \underline{e}_n)$ par rapport au repère global du maillage. Les angles définissant le passage du repère global au repère local attaché à la maçonnerie, notés ψ, θ, φ , sont les angles d'Euler, dont la définition est rappelée en annexe (on choisit ce paramétrage par souci de cohérence, parce qu'il est déjà utilisé par le code pour certains critères de plasticité anisotrope).

On a donc au total dans le cas tridimensionnel 12 paramètres : 9 paramètres matériels et 3 paramètres géométriques.

Dans le cas bidimensionnel, la relation de comportement ne fait intervenir qu'un seul des trois modules de cisaillement, et la définition de l'orientation du repère matériel est également plus simple : on considère que la direction n correspond à la normale au plan du maillage ; comme le trièdre $(\underline{e}_b, \underline{e}_h, \underline{e}_n)$ est direct, il

suffit de définir la direction de \underline{e}_b dans le plan du maillage. On donnera l'angle θ entre l'axe horizontal du repère global Ox et la direction de \underline{e}_b

En conclusion, les paramètres à fournir sont :

En 2D : $E_b, E_h, E_n, \nu_{bh}, \nu_{hn}, \nu_{bn}, G_{bh}, \theta$

En 3D : $E_b, E_h, E_n, \nu_{bh}, \nu_{hn}, \nu_{bn}, G_{bh}, G_{hn}, G_{bn}, \psi, \theta, \varphi$

Paramètres pour le modèle élastique orthotrope général (IELAS=14) en deux dimensions

- modules d'Young dans les directions b, h, n : E_b, E_h, E_n (E_B, E_H, E_N) [Pa]
- coefficients de Poisson $\nu_{bh}, \nu_{hn}, \nu_{bn}$ [-]
- module de cisaillement dans le plan bh G_{bh} [Pa]
- angle entre la direction horizontale et la direction b : θ [deg]

Paramètres pour le modèle élastique orthotrope général (IELAS=14) en trois dimensions

- modules d'Young dans les directions b, h, n : E_b, E_h, E_n (E_B, E_H, E_N) [Pa]
- coefficients de Poisson $\nu_{bh}, \nu_{hn}, \nu_{bn}$ [-]
- modules de cisaillement entre plans G_{bh}, G_{hn}, G_{bn} [Pa]
- angles d'Euler définissant le passage du repère global au repère (e_b, e_h, e_n) : ψ, θ, φ [degrés]

3.3.3.8. Modèle de Zucchini pour la maçonnerie (IELAS=15)

Zucchini et Lourenço(2002) ont proposé un modèle pour tenir compte de l'anisotropie des propriétés mécaniques des ouvrages en maçonnerie. Il s'agit d'un modèle orthotrope, comme le précédent, dont les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement sont déduits de la géométrie de l'appareillage (la figure 9) et des propriétés élastiques des blocs et des joints par une démarche d'homogénéisation (NB : il s'agit d'une résolution approchée des équations posées sur la cellule de base, mais qui permet d'obtenir les caractéristiques voulues de manière efficace sur le plan numérique).

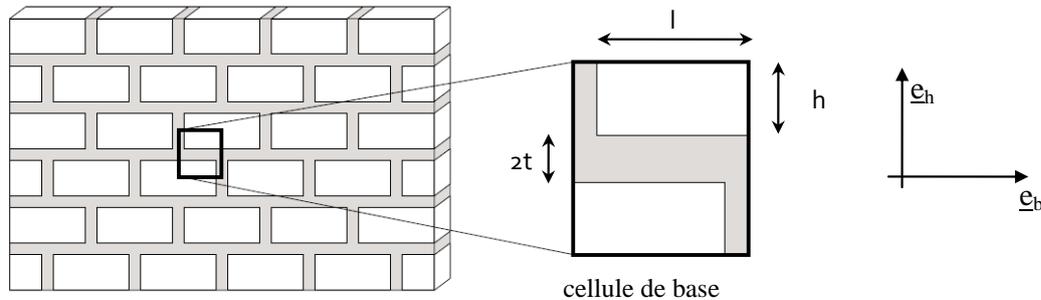


Figure 9 – Définition de la cellule de base utilisée par Zucchini et Lourenço (2002)

Dans la terminologie anglaise, reprise par Zucchini, les joints horizontaux sont placés dans la direction du lit (bed en anglais), les joints verticaux sont appelés « head joints », ce qui justifie les indices b et h associés dans ce qui précède aux deux premières directions du repère local. Le dernier indice, n , correspond à la direction de la normale au plan du mur maçonné.

Les paramètres à fournir sont les caractéristiques mécaniques (module d'Young et coefficient de Poisson) des blocs (ou briques) et du mortier qui constitue les joints :

En 2D : $E_1, \nu_1, E_m, \nu_m, 2l, 2h, 2t, \theta$

En 3D : $E_1, \nu_1, E_m, \nu_m, 2l, 2h, 2t, \psi, \theta, \varphi$

Où l'indice 1 est relatif aux blocs (ou aux briques) et l'indice m aux joints de mortier.

Les angles définissant le passage du repère global au repère local attaché à la maçonnerie, notés ψ, θ, φ sont les angles d'Euler, dont la définition est rappelée en annexe.

Paramètres pour le modèle de Zucchini pour la maçonnerie (IELAS=15)

- module d'Young des briques E_1 [Pa]
- coefficient de Poisson des briques ν_1 [-]
- module d'Young du mortier E_m [Pa]
- coefficient de Poisson du mortier ν_m [-]
- longueur, épaisseur des briques, et épaisseur des joints $2l, 2h, 2t$ [m]

En deux dimensions :

- angle entre la direction horizontale et la direction b : θ [deg]

En trois dimensions :

- angles d'Euler définissant le passage du repère global au repère (e_b, e_h, e_n) : ψ, θ, φ [degrés]

3.3.3.9. Élasticité linéaire orthotrope pour une voûte elliptique (IELAS=16)

Ce modèle vise à reproduire le comportement d'un matériau anisotrope (orthotrope général) hétérogène, dont les directions locales d'anisotropie suivent une voûte elliptique. Il s'agit de représenter une voûte en maçonnerie, dont les briques seraient disposées suivant la tangente et la normale à une « ellipse moyenne » qui correspond à la ligne centrale de la voûte. La première direction locale d'anisotropie est parallèle à la tangente à l'ellipse, la deuxième à la normale à l'ellipse, la troisième à l'axe de la galerie. L'utilisateur se trouve amené à donner un certain nombre de paramètres géométriques, représentés, dans le cas 2D, sur la figure suivante.

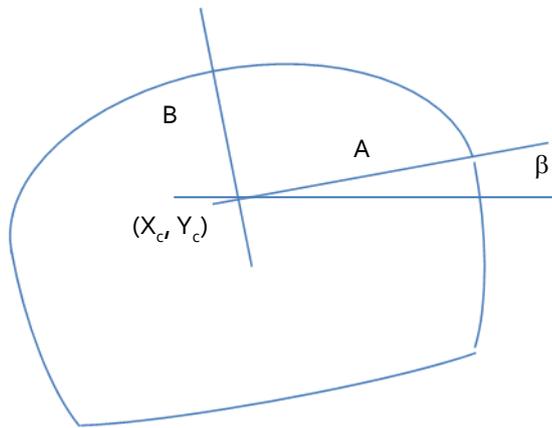


Figure 10 – Paramètres géométriques de la voûte elliptique

En trois dimensions, on donne les coordonnées (X_c, Y_c, Z_c) d'un point de l'axe de la galerie, deux angles γ et ω (en degrés) qui définissent l'orientation de l'axe de la galerie. γ est l'angle (dans l'intervalle $[-90^\circ, 90^\circ]$) entre la projection de l'axe sur le plan $z = 0$ et l'axe des x (longitude). ω est l'angle (dans l'intervalle $[-90^\circ, 90^\circ]$) entre la direction de l'axe et l'horizontale (latitude). Un vecteur directeur de l'axe est donc donné par $(\cos \gamma \cos \omega, \sin \gamma \cos \omega, \sin \omega)$.

Paramètres du modèle élastique linéaire orthotrope pour une voûte elliptique (IELAS=16) en 2 dimensions

- modules d'Young dans les directions 1, 2, 3 : E_1, E_2, E_3 ($E1, E2, E3$) [Pa]
- coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ [-]
- module de cisaillement dans le plan 12 G_{12} [Pa]
- coordonnées de l'axe de la galerie X_c, Y_c [m]
- demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse A, B [m]
- angle entre la direction horizontale et le grand axe : β [deg]

Paramètres du modèle élastique linéaire orthotrope pour une voûte elliptique (IELAS=16) en 3 dimensions

- modules d'Young dans les direction 1, 2, 3 : E_1, E_2, E_3 ($E1, E2, E3$) [Pa]
- coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ [-]

- modules de cisaillement G_{12} , G_{23} , G_{13} [Pa]
- coordonnées d'un point de l'axe de la galerie X_c , Y_c , Z_c [m]
- demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse A , B [m]
- angles définissant la direction de l'axe de la galerie γ , ω [deg]
- angle de tilt : β [deg]

3.3.3.10. Modèle de Zucchini pour une voûte elliptique en maçonnerie (IELAS=17)

Il s'agit d'une variante du modèle précédent, dans laquelle les modules élastiques sont calculés en fonction des caractéristiques de la maçonnerie suivant les formules proposées par Zucchini et Lourenço

Paramètres du modèle de Zucchini pour une voûte elliptique en maçonnerie (IELAS=17) en deux dimensions

- module d'Young des briques E_B [Pa]
- coefficient de Poisson des briques ν_B [-]
- module d'Young du mortier E_m [Pa]
- coefficient de Poisson du mortier ν_m [-]
- longueur, épaisseur des briques, et épaisseur des joints $2l$, $2h$, $2t$ [m]
- coordonnées de l'axe de la galerie X_c , Y_c [m]
- demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse A , B [m]
- angle entre la direction horizontale et le grand axe : β [deg]

Paramètres du modèle de Zucchini pour une voûte elliptique en maçonnerie (IELAS=17) en trois dimensions

- module d'Young des briques E_1 [Pa]
- coefficient de Poisson des briques ν_1 [-]
- module d'Young du mortier E_m [Pa]
- coefficient de Poisson du mortier ν_m [-]
- longueur, épaisseur des briques, et épaisseur des joints $2l$, $2h$, $2t$ [m]
- coordonnées d'un point de l'axe de la galerie X_c , Y_c , Z_c [m]
- demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse A , B [m]
- angles définissant la direction de l'axe de la galerie γ , ω [deg]
- angle de tilt : β [deg]

3.3.3.11. Elasticité isotrope non linéaire type Cam Clay (IELAS=3)

Les modèles élastiques précédents sont tous linéaires, la distinction entre eux venant du caractère isotrope ou non, et de la possibilité de prendre en compte des caractéristiques hétérogènes dans un même groupe d'éléments.

On s'intéresse dans la suite à des modèles élastiques isotrope non linéaires, dans lequel les modules d'élasticité dépendent de l'état de contrainte.

Dans le cas du modèle IELAS=3, le module de compression dépend (linéairement) de la contrainte moyenne, et le module de cisaillement est constant.

Le module de compression tangent K_t est proportionnel à la contrainte moyenne :

$$K_t = p (1+e_o)/\kappa$$

où e_o est l'indice des vides et κ un paramètre matériel sans dimension parfois appelé coefficient de gonflement.

La programmation dans CESAR inclut une « sécurité » pour éviter les modules nuls ou négatifs: on impose que K_t reste supérieure à une valeur prescrite K_{min} .

Le module de cisaillement G est constant. On calcule le module d'Young et le coefficient de Poisson tangent correspondants par les formules classiques : $E = 9GK/(3K+G)$ et $\nu = (3K-2G)/(2(3K+G))$.

Paramètres pour le modèle élastique isotrope non linéaire type Cam-Clay (IELAS=3):

- module de cisaillement G (G) [Pa]
- indice des vides e_o ($EZERO$) [-]
- Pente des courbes de charge/décharge élastique en compression isotrope κ ($KAPPA$) [-]
- valeur minimale du module de compression K_{min} ($KMIN$) [Pa]

NB : si K varie et G est constant, alors le coefficient de Poisson varie. Tant que K et G sont positifs, la matrice élastique reste définie positive, mais on peut avoir un coefficient de Poisson négatif. Ce genre de modèle est donc à utiliser avec précaution.

3.3.3.12. Elasticité isotrope non linéaire type Fahey et Carter (IELAS=4)

Il s'agit d'un modèle élastique isotrope non linéaire, dans lequel les modules de cisaillement et de compression tangents dépendent de l'état de contraintes actuel. Le modèle est dérivé du modèle hyperbolique de Duncan. Le module de cisaillement et de compression varient comme une puissance de la contrainte moyenne. La dépendance vis-à-vis de la contrainte déviatorique est plus complexe. Il comporte un grand nombre de paramètres qui lui donnent une certaine souplesse. En contrepartie, plusieurs jeux de paramètres peuvent donner des résultats voisins pour la simulation d'un essai triaxial par exemple, ce qui fait de la détermination des paramètres à partir de résultats d'essais une tâche ardue. Les résultats obtenus avec ce modèle, tel qu'il est implanté dans CESAR, sont discutés en détail dans la thèse de Sophie Coquillay (2005).

Les paramètres à fournir sont notés n , ν_o , f , g , C , p_{ref} , c' , ϕ' .

Les deux derniers sont les paramètres de résistance au cisaillement du critère de Mohr-Coulomb (cohésion et angle de frottement), qui sont ici considérés comme des paramètres ayant aussi une influence sur les propriétés élastiques. p_{ref} est une valeur de référence de la pression ; n un exposant contrôlant les variations

de G avec la contrainte moyenne ; C un module de cisaillement référence. Les deux scalaires f et g sont sans dimension.

Formulation :

$$G_o = C (1 + \langle p \rangle / p_{ref})^n \quad \text{où} \quad \langle p \rangle = p \text{ si } p \geq 0 \text{ et } 0 \text{ si } p < 0$$

$$G_t = G_o [(1-f (t/t_{max})^g)^2 / [(1-f(1-g) (t/t_{max})^2]$$

$$K_t = K_o = \frac{2(1+\nu_o)}{3(1-2\nu_o)} G_o$$

$$t = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \text{ et } t_{max} = \frac{3(p' \sin \varphi' + c' \cos \varphi')}{3 - \sin \varphi'}$$

Paramètres pour le modèle élastique isotrope non linéaire type Fahey et Carter (IELAS=4):

- exposant n (N) [-]
- coefficient de Poisson de référence ν_o (NUZERO) [-]
- paramètres de forme f et g [-]
- Module de cisaillement de référence C [Pa]
- contrainte de référence p_{ref} (PREF) [Pa]
- cohésion c' (COHES) [Pa]
- angle de frottement interne φ' (PHI) [Pa]

3.3.3.13. Elasticité isotrope non linéaire du Hardening soil model (IELAS=5)

CESAR propose d'isoler la partie élastique du Hardening Soil Model (Schanz et al, 1999), dont la formulation est la suivante. Il s'agit d'un modèle élastique isotrope non linéaire, avec un coefficient de Poisson constant et un module d'Young qui dépend de l'état de contraintes. Comme dans le modèle de Fahey et Carter entre autres, il dépend aussi des caractéristiques de résistance c et φ (à la rupture). Le module d'Young est noté E_{ur} et donné par :

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref} \left(\frac{\sigma_3 + c \cotan \varphi}{\sigma_{ref} + c \cotan \varphi} \right)^m$$

Le coefficient de Poisson est constant et noté ν_{ur} . La dépendance du module vis-à-vis de la contrainte principale mineure peut conduire à un module nul ou indéterminé. Dans CESAR, on a introduit une valeur minimale, prise égale à 0,2% de E_{urref} .

Note : les indices « ur » font référence à un déchargement-rechargement élastique (en anglais unloading-reloading).

Paramètres pour le modèle élastique isotrope non linéaire du Hardening Soil Model (IELAS=5):

- module d'Young de référence E_{ur_ref} [Pa] ;

- coefficient de Poisson en chargement déchargement ν_{ur} [-] ;
- cohésion c [Pa] ;
- angle de frottement interne φ [deg] ;
- exposant m [-]
- pression de référence p_{ref} [Pa]

3.3.3.14. Elasticité isotrope non linéaire type Duncan (IELAS=6)

Ce modèle propose que le module de cisaillement diminue lorsque l'on se rapproche de la rupture, décrite par le modèle de Hoek et Brown. La formulation est assez complexe :

- le module de compression tangent K_t est donné par :

$$K_t = C (p/p_{ref})^n \quad (\text{avec une sécurité: } K_t \geq K_{min})$$

- le module de cisaillement tangent G_t est donné par :

$$G_t = G_o (1 - R_f (\sigma_1 - \sigma_3)) / ((\sigma_1 - \sigma_3)_{rup})$$

$$\text{avec } G_o = K_t (1 - 2\nu_o) / (2(1 + \nu_o)) \quad \text{et } (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \sigma_c (m \sigma_3 / \sigma_c + s)^\alpha$$

Paramètres pour le modèle élastique isotrope non linéaire type Duncan (IELAS=6):

- paramètre de résistance σ_c (SIGMAC) [Pa] ;
- coefficient de fracturation s (S) [-] ;
- paramètre de forme m (M) [-] ;
- exposant du critère de Hoek Brown α [-] ;
- valeur minimale du module de compression K_{min} [Pa] ;
- valeur de référence du module de compression C [Pa] ;
- pression de référence p_{ref} [Pa] ;
- exposant dans le module de compression n [-] ;
- coefficient de Poisson sous contrainte isotrope ν° [-] ;
- paramètre pour le calcul du module de cisaillement R_f ($0 < R_f < 1$) [-]

3.3.3.15. Elasticité isotrope non linéaire dérivée de Fahey et Carter (IELAS=7)

On a proposé une variante du modèle IELAS=4, dans lequel la dépendance vis-à-vis de la contrainte déviatorique est simplifiée.

Le module de cisaillement tangent G_t est donné par :

$$G_t = G \exp (-q/\alpha)$$

où q est le déviateur des contraintes : $q = (3/2 s_{ij}s_{ij})^{1/2}$

G dépend de la contrainte moyenne suivant :

$$G = \text{Max} \{ G_{min}, G_o (p/p_a)^n \}$$

Le coefficient de Poisson ν est constant

Paramètres à fournir : G_o , p_a , n , G_{min} , α , ν

Paramètres pour le modèle élastique isotrope non linéaire type Fahey et Carter modifié (IELAS=7):

- Module de cisaillement de référence G_o [Pa]
- pression de référence p_a (PREF) [Pa]
- exposant n (N) [-]
- valeur minimale de G , G_{min} (GMIN) [Pa]
- coefficient de décroissance du module de cisaillement avec le déviateur q , α (ALPHA) [Pa]
- coefficient de Poisson ν [-]

3.3.3.16. Elasticité isotrope transverse non linéaire : modèle ANL ou de Gilleron (IELAS=24)

Le modèle le plus classiquement utilisé pour le calcul des ouvrages géotechniques est le modèle élastique-parfaitement plastique obtenu en combinant une loi élastique linéaire isotrope avec le critère de plasticité de Mohr-Coulomb, la loi d'écoulement pouvant éventuellement être non associée. Ce modèle ne donne pas nécessairement de très bons résultats pour représenter la distribution de tassements en surface au-dessus d'un tunnel peu profond, et tendent à donner une « cuvette de tassement » trop large : la zone concernée par des tassements significatifs de part et d'autre de l'axe du tunnel est plus grande dans les calculs que celle donnée par les observations disponibles.

Gilleron (2017) a proposé d'introduire une anisotropie de la loi d'élasticité du sol, tout en cherchant à éviter une formulation trop complexe. Le modèle proposé est un modèle élastoplastique-parfaitement plastique dont la partie élastique est non linéaire : la raideur du sol augmente lorsque la contrainte moyenne augmente et diminue lorsque la contrainte déviatorique augmente. L'originalité de la formulation réside dans le fait qu'elle permet de contrôler la raideur initiale dans le terrain, dans l'hypothèse où les contraintes initiales sont géostatiques.

Le modèle comporte plusieurs composantes :

Dépendance des modules vis-à-vis de la contrainte moyenne

Le module de cisaillement dans le domaine des petites déformations, que l'on note ici G_o , est donné par :

$$G_o = G_{ref} + A (p'/p_{ref})^r$$

où p' est la contrainte moyenne ; p_{ref} est un paramètre qui normalise la contrainte moyenne, fixé à 20 kPa, soit la variation de la contrainte verticale sur un mètre pour un sol hors nappe ; A est un paramètre homogène à une contrainte qui contrôle la croissance du module de cisaillement ; r est un exposant sans dimension, que l'on propose de prendre r égal à 0,5 pour les sols granulaires et 1 pour les sols fortement cohésifs ; G_{ref} est une valeur de référence pour le module de cisaillement, qui correspond à une contrainte moyenne nulle. C'est le module de cisaillement initial si l'on choisit A égal à zéro pour désactiver la dépendance de G_o vis-à-vis de p' . Ce modèle introduit un gradient de raideur avec la profondeur qui améliore l'estimation des tassements dans le calcul des tunnels, en réduisant les tassements loin de l'axe. Cela contribue à réduire la largeur de la cuvette, mais ne suffit pas à obtenir des largeurs réalistes.

Dépendance des modules vis-à-vis de la contrainte déviatorique

La courbe (q, ε_1) prend la forme d'une courbe que l'on peut approcher par une hyperbole dont l'asymptote est définie par la contrainte déviatorique maximale admissible, elle-même fixée par le critère de rupture. Dans le modèle ANL, on normalise la contrainte déviatorique par sa valeur initiale ou une valeur définie par l'utilisateur, et on définit une décroissance exponentielle du module de cisaillement en fonction de la contrainte déviatorique normalisée. Cette formulation favorise les déplacements à proximité de l'excavation, là où le sol est perturbé et la contrainte déviatorique élevée.

Le module de cisaillement tangent est calculé suivant :

$$G_t = \text{Min} \left[\text{Max} \left(G_{min}; G_0 \cdot \xi^{\left(1 - \frac{q}{\beta_i p'_i}\right)} \right); G_0 \right]$$

Les opérateurs *Min* et *Max* permettent de s'assurer que G_t reste supérieur à une valeur minimale G_{min} , et inférieur à une valeur maximale G_0 . G_0 est défini à partir de l'état de contraintes initial et de la formulation de dépendance avec la contrainte moyenne vue au paragraphe précédent. G_{min} est le module de cisaillement tangent minimal initial. On recommande de prendre G_{min}/G_0 égal à 0,1 : en limitant le module de cisaillement à 10 % de sa valeur initiale, on évite des déformations élastiques excessives. La contrainte déviatorique q est normalisée par le produit du paramètre β_i par la contrainte moyenne effective initiale p'_i (et pas par une valeur fixée par l'utilisateur car cette solution ne permettrait pas de tenir compte du gradient vertical de contrainte déviatorique).

La normalisation de la contrainte déviatorique q fait intervenir la contrainte moyenne effective initiale p'_i , qui est nulle en surface. Cela rend le calcul du module de cisaillement délicat à l'approche de la surface. On pourrait adapter légèrement cette formulation (par exemple en prenant G_t est égal à G_0 si p'_i est inférieur à une certaine valeur), ou utiliser une loi élastique linéaire sur les deux premiers mètres du modèle où le sol est souvent remanié et difficile à caractériser mécaniquement avec précision.

Le paramètre β_i décrit la décroissance du module de cisaillement lorsque q augmente. Il est pris égal à :

$$\beta_i = \text{Max} \left(\frac{q_i}{p'_i}; \beta \right)$$

où β est la valeur du rapport q/p'_i pour laquelle la décroissance du module de cisaillement diminue. β est défini par l'utilisateur. En prenant $\beta > \frac{q_i}{p'_i}$, on peut faire en sorte que la diminution du module intervienne de manière retardée, lorsque le déviateur a beaucoup augmenté. On peut relier le paramètre β à l'angle de frottement interne par la formule de Jaky, ou à K_0^{NC} .

$$\beta = \frac{(1 - K_0^{NC})}{(1 + 2K_0^{NC})/3} = \frac{3 - 3(1 - \sin\varphi)}{1 + 2(1 - \sin\varphi)}$$

Enfin, le paramètre ξ est un coefficient sans dimension qui contrôle la décroissance du module de cisaillement tangent, s'il est plus grand que 1. Si ξ est inférieur ou égal à 1, on se ramène au cas élastique linéaire avec G_0 comme module de cisaillement quelle que soit la valeur des autres paramètres : le mécanisme de décroissance de la raideur avec le déviateur est désactivé.

Cette formulation permet de maîtriser le module initial dans le massif quel que soit l'état initial de contrainte grâce au paramètre β et d'isoler la contribution de la contrainte déviatorique dans la dégradation de ce module. Le paramètre ξ permet de définir la décroissance du module indépendamment des paramètres de rupture.

Coefficient de Poisson

Suivant l'approche proposée par (Fahey & Carter, 1993), le coefficient de Poisson tangent est variable, et calculé de telle sorte que le module de compression isotrope K_t soit constant :

$$\nu_t = \frac{(1 + \nu_0) - (1 - 2\nu_0)G_t/G_0}{(2(1 + \nu_0) + (1 - 2\nu_0)G_t/G_0)}$$

Le fait de ne pas conserver une valeur constante pour le coefficient de Poisson évite une chute du module de compression lorsque le module de cisaillement diminue.

Extension : module de déchargement/rechargement

On peut associer à cette formulation élastique non-linéaire un module élastique de déchargement/rechargement pour les situations où la contrainte déviatorique est inférieure à sa plus grande valeur connue. Pour cela, on introduit une variable d'état supplémentaire q^e , qui représente la plus grande contrainte déviatorique vue au point considéré. On introduit le module d'élasticité de déchargement/rechargement G_{ur} ainsi que le coefficient de Poisson de déchargement/rechargement ν_{ur} . Ce mécanisme s'active lorsque la contrainte déviatorique q est inférieure à 90 % de q^e :

Si $q \geq 0,9 \cdot q^e$: chargement déviatorique primaire, on utilise les équations précédentes

si $q < 0,9 \cdot q^e$: déchargement / rechargement, le comportement est élastique linéaire avec $G_t = G_{ur}$; $\nu_t = \nu_{ur}$

La variable d'état q^e est initialisée égale à $\beta p'_i$, la plus grande valeur passée de la contrainte déviatorique. Elle est actualisée à chaque incrément de calcul. La Figure 2 illustre le principe de cette partie du modèle, en représentant une courbe (q, ε_1) lors d'un essai triaxial non monotone. Jusqu'à atteindre la contrainte déviatorique initiale, le sol est en chargement initial. Ensuite la dégradation de raideur en fonction de la contrainte déviatorique s'active suivant la loi exponentielle.

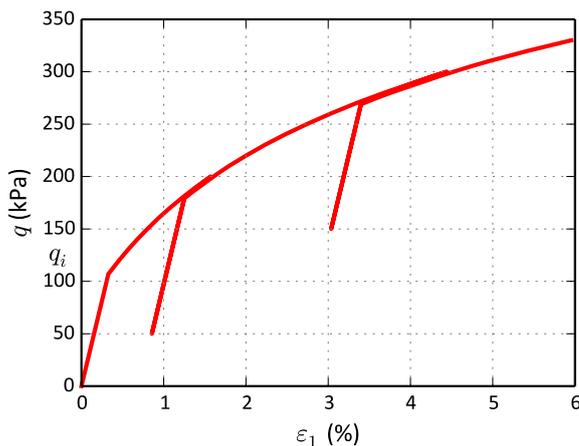


Figure2. Exemple de courbe (q, ε_1) au cours d'un essai triaxial non monotone

Des études paramétriques (Gilleron, 2016) montrent que l'impact de ce mécanisme, pour un calcul de tunnel, est très faible. En effet, les déplacements en surface se développent en avant du front et au niveau de la zone non soutenue où la contrainte déviatorique croît de façon monotone avec les incréments de chargements et l'avancée dans les phases d'excavation.

Anisotropie des propriétés élastiques

Le point de vue de Gilleron (2016) est qu'on peut obtenir des cuvettes de tassement plus réalistes si l'on prend en compte dans le calcul une anisotropie transverse des propriétés élastiques du sol. La relation contraintes-déformations est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_h & -\nu_{hh}/E_h & -\nu_{vh}/E_v & & & \\ -\nu_{hh}/E_h & 1/E_h & -\nu_{vh}/E_v & & & \\ -\nu_{vh}/E_v & -\nu_{vh}/E_v & 1/E_v & & & \\ & & & (1 + \nu_{hh})/E_h & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1/2G_{vh} & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & 1/2G_{vh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Le comportement est décrit par cinq paramètres indépendants : E_h , E_v , ν_{hh} , ν_{vh} et G_{vh} au lieu des deux paramètres classiques E et ν .

On trouve dans la littérature trois rapports caractéristiques :

- le rapport entre les modules d'élasticité horizontal et vertical $n = E_h/E_v$.

- le rapport entre les modules de cisaillement horizontal et vertical $\alpha = \frac{G_{hh}}{G_{vh}}$, avec

$$G_{hh} = \frac{E_h}{2(1 + \nu_{hh})}$$

- le rapport entre le module de cisaillement vertical et le module d'élasticité vertical, noté $m = G_{vh}/E_v$. Pour un massif isotrope, il est égal à $m_{iso} = \frac{1}{2(1+\nu_{hh})}$, qui vaut 0,33 dans le cas d'un massif non drainé ($\nu = 0,5$) et 0,5 dans le cas où ν est nul.

On peut établir la relation suivante entre les différents rapports :

$$\frac{m}{m_{iso}} = \frac{n}{\alpha}$$

L'influence de l'anisotropie du comportement élastique sur les tassements calculés ne fait pas l'objet d'un consensus dans la littérature, probablement à cause de la difficulté de choisir les paramètres. On peut cependant identifier deux approches dans la littérature : la première se concentre sur le module de cisaillement transverse et suppose que les modules d'élasticité vertical et horizontal sont égaux, ce qui peut paraître peu réaliste ; la seconde, basée sur les travaux de (Graham & Houlsby, 1983), établit des corrélations entre les cinq paramètres de l'isotropie transverse. Elle conduit à un module de cisaillement vertical supérieur au module de cisaillement dans le plan d'isotropie.

Gilleron propose d'élaborer une formulation qui permette de reproduire les cuvettes de tassement observées, pour le cas où le coefficient de pression des terres au repos est inférieur à 1, qui paraît représentatif de la région parisienne. On fait l'hypothèse que cette anisotropie de contraintes se traduit par un module de Young horizontal plus faible que le module de Young vertical, c'est-à-dire $n < 1$. On limite a priori l'intervalle de variation de n aux valeurs comprises entre 0,5 et 1. On cherche ensuite à définir une corrélation entre n et m/m_{iso} qui ferait intervenir α à la manière des travaux de (Graham & Houlsby, 1983). On propose l'égalité suivante :

$$\alpha = \frac{1}{n^x}$$

Cette formule constitue l'hypothèse de base du modèle proposé. Elle est justifiée par les bons résultats obtenus pour la largeur des cuvettes de tassement, mais n'est pas étayée par des résultats d'essais adaptés suffisamment nombreux et documentés. La connaissance de deux paramètres, α et x par exemple permet alors de déterminer complètement le modèle isotrope transverse. On a :

$$n = \alpha^{-1/x}$$

$$\frac{m}{m_{iso}} = \alpha^{-(1/x+1)}$$

Si x est infini (pour α donné), n tend vers 1 et m/m_{iso} tend vers $1/\alpha$, on retrouve alors le modèle de (Lee & Rowe, 1989) où seul le module de cisaillement transverse diffère du cas isotrope. D'autre part, on peut vérifier que $n = E_h/E_v$ est une fonction croissante de x si $\alpha > 1$ et décroissante si $\alpha < 1$.

En faisant varier la valeur de α , pour x fixé, on fait varier simultanément n et m/m_{iso} . Par exemple, pour $x = 0,8$, lorsque n varie entre 0,5 et 0,8, le rapport m/m_{iso} varie entre 0,2 et 0,6.

Une étude paramétrique conduite par Gilleron (2016) permet de choisir les paramètres n et m/m_{iso} du modèle pour ajuster la largeur de la cuvette de Peck donnée dans (Mair & Taylor, 1997) pour différents types de sols. Cette corrélation a été établie, sur la base de simulations numériques, pour un tunnel de 10 m de diamètre dont l'axe est à 20 m de profondeur, avec un modèle de comportement élastique linéaire. Elle n'est donc qu'indicative et son domaine de validité reste à préciser.

Tableau 1. Corrélation entre l'anisotropie transverse et la grandeur caractéristique K

Sols	K	n	m/m_{iso}
Argiles	0,5	1	1
Marnes/limons	0,4	0,76	0,61
Sables moyens	0,35	0,60	0,40
Sables grossiers	0,325	0,50	0,28

Paramètres pour le modèle élastique isotrope transverse non linéaire de Gilleron (IELAS=24):

- Gref [Pa] : valeur de référence du module de cisaillement
- A [-] : paramètre de croissance du module avec la contrainte moyenne
- r [-] : exposant de croissance du module avec la contrainte moyenne
- Gmin/G0 [-]
- XSI [-] : facteur de forme pour la décroissance de raideur avec la contrainte déviatorique
- BETA [-] : paramètre pour la décroissance de raideur avec la contrainte déviatorique
- nu0 [-] : coefficient de Poisson de référence
- Gur/G0 [-] : paramètre pour le mécanisme de déchargement/rechargement
- nu_ur : coefficient de Poisson pour le déchargement/rechargement
- n : rapport du module horizontal sur le module vertical
- m/miso : paramètre anisotrope pour le module de cisaillement vertical
- THETA, PHI [degrés]
 - en condition bidimensionnelle, θ est l'angle entre l'horizontale et le plan d'isotropie
 - en condition tridimensionnelle, θ est l'angle entre le premier axe du repère global OX et l'axe Ox, φ l'angle entre l'axe Ox du plan horizontal et le plan isotrope

3.3.4. Critères de plasticité, potentiels plastiques, et lois d'écroissage

3.3.4.1. Critère de Tresca (ICRIT=1)

La fonction critère est donnée par :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2c$$

où σ_1 et σ_3 désignent la plus grande et la plus petite contrainte principale (en valeur algébrique).

Ce critère porte sur la différence entre les contraintes principales extrêmes $\sigma_1 - \sigma_3$ (en supposant les contraintes principales ordonnées suivant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). La condition $f(\underline{\sigma}) \leq 0$ impose que cette différence reste inférieure en valeur absolue à $2c$, où c est une caractéristique du matériau. Il est facile de voir que la contrainte maximale en traction simple est égale à $2c$, et la construction de Mohr montre que la contrainte de cisaillement maximale est égale à c (puisque le diamètre du grand cercle de Mohr est précisément égal à $\sigma_1 - \sigma_3$).

Il est intéressant de noter que la valeur du critère ne dépend pas de la contrainte moyenne, c'est-à-dire que l'on a, pour toute valeur de p :

$$f(\underline{\sigma}) = f(\underline{\sigma} + p \underline{1})$$

Ce critère est bien adapté pour des matériaux quasi-incompressibles comme les argiles en condition non drainée, ce qui a conduit à donner dans CESAR le nom de cohésion au paramètre c ; il est aussi adapté pour les métaux (c serait plutôt dans ce cas une limite en cisssion simple, ou la moitié de la contrainte limite en traction simple).

Paramètres du critère de Tresca (ICRIT=1) :

- cohésion c (C) [Pa]

Lois d'écroissage pour le critère de Tresca

Pour le moment, aucune loi d'écroissage n'a été programmée pour le critère de Tresca

3.3.4.2. Critère de von Mises (ICRIT=2)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} - k$ avec $J_2 = 1/2 \underline{s} : \underline{s}$
- Paramètres à fournir : k

Ce critère porte sur le deuxième invariant du tenseur de contraintes J_2 . Dans le contexte de l'essai triaxial, cet invariant est égal, à un facteur près, à la différence entre les contraintes principales majeure et mineure. Comme pour le critère de Tresca, la valeur de la fonction de charge ne dépend pas de la contrainte moyenne. La surface de charge est cependant différente de celle du critère de Tresca, puisque c'est un cylindre dans l'espace des contraintes principales, dont l'axe coïncide avec la trissectrice.

La contrainte maximale en traction simple est égale à $k\sqrt{3}$, et la contrainte de cisaillement maximale est égale à k .

Ce critère est plutôt employé pour les métaux.

Contrairement au précédent, ce critère peut être associé dans CESAR à plusieurs lois d'érouissage.

Lois d'érouissage pour le critère de von Mises

• érouissage linéaire : IECR = 1

il s'agit de la loi du critère IMOD=12 de la version standard (décrite dans le GT52)

$$k + \Delta k = \sqrt{k^2 + 2 A \Delta W^p}$$

où ΔW^p est l'incrément de travail plastique défini par : $\Delta W^p = \sigma : \Delta \varepsilon^p$

paramètre à fournir : A

• loi de Prevost et Hoeg : IECR = 2

il s'agit de la loi du critère IMOD=19 de la version standard

$$k = \frac{A [B (\varepsilon_d^p)^2 + \varepsilon_d^p]}{\sqrt{3} [1 + (\varepsilon_d^p)^2]}$$

Note : Dans la programmation du modèle IMOD=19, le paramètre ε_d^p est multiplié par 1000 (cf thèse de Yuritzinn page 127).

paramètres à fournir : A, B

• loi de Prevost et Hoeg modifiée : IECR = 3

$$k = \frac{A [B (\varepsilon_d^p)^2 + \varepsilon_d^p]}{\sqrt{3} [1 + (\varepsilon_d^p)^2]}$$

Note : C'est le même modèle sans la multiplication de ε_d^p par 1000.

paramètres à fournir : A, B

Note : à propos de la prise en compte d'un érouissage déviatorique, voir l'annexe (0). Dans les modèles ci-dessus, la déformation déviatorique considérée est calculée en intégrant $\lambda \frac{\partial f}{\partial q} = \dot{\lambda} / \sqrt{3}$.

3.3.4.3. Critère de Coulomb (ICRIT=3)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi$
- Paramètres à fournir : φ
- Lois d'écroûissage pour le critère de Coulomb : aucune

3.3.4.4. Critère de Mohr-Coulomb (ICRIT=4)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi$
- Paramètres à fournir : c, φ
- Lois d'écroûissage pour le critère de Mohr-Coulomb : aucune

3.3.4.5. Critère de Mohr-Coulomb avec c et φ variant avec la profondeur (ICRIT=15)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi$
avec $c = c_0 + y \Delta c$; $\varphi = \varphi_0 + y \Delta \varphi$
- Paramètres à fournir : $c_0, \Delta c, \varphi_0, \Delta \varphi$

NB : y représente la coordonnée du point considéré sur la verticale ascendante : pour que la cohésion augmente avec la profondeur, il faut donc que le gradient Δc soit négatif. D'autre part, on prendra garde au fait que la valeur des caractéristiques de résistance dépend de l'origine choisie pour les coordonnées verticales.

- Lois d'écroûissage pour le critère de Mohr-Coulomb avec c et φ variables avec la profondeur : aucune

3.3.4.6. Critère de Drucker Prager (ICRIT=5)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k$
avec $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $J_2 = 1/2 \underline{s} : \underline{s}$
- Paramètres à fournir : c, φ (le code calcule α et k : $\alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9+12 \tan^2 \varphi}}$; $k = \frac{3c}{\sqrt{9+12 \tan^2 \varphi}}$)

• Lois d'érouissage pour le critère de Drucker Prager :

- érouissage (négatif) à module constant : IECR=1

$$\delta k = -H \delta \lambda \quad (\delta \lambda = \text{multiplicateur plastique})$$

paramètre à fournir : H

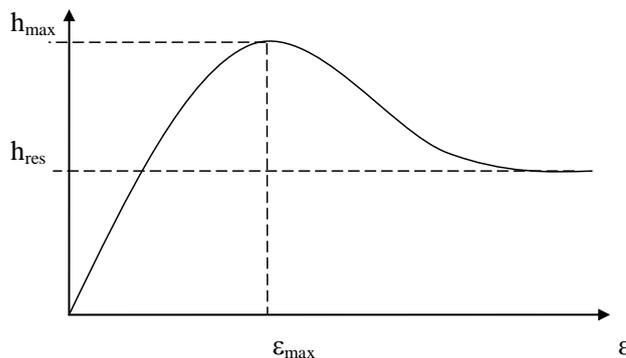
Note : il s'agit en fait de la loi du modèle IMOD=14 de la version standard, en prenant

$H = \mu / (1 + \chi)$, où μ est le module de cisaillement ($E/2(1+\nu)$) et χ le paramètre d'érouissage du modèle IMOD=14

- érouissage volumique variable : IECR=3

l'érouissage porte à la fois sur α et k , égaux à $(1+\eta) \alpha^0$ et $(1+\eta) k^0$, avec $\eta = h(\varepsilon_p^v)$

$$h(x) = \frac{ax+bx^2}{1+cx^2} \quad \text{avec} \quad a = 2 h_{\max}/x_{\max} ; c = \frac{h_{\max}}{(h_{\max} - h_{\text{res}}) x_{\max}^2} ; b = c h_{\text{res}}$$



paramètres à fournir : h_{\max} ; h_{res} ; x_{\max} (tous trois sans dimension)

Note : il s'agit d'un modèle dérivé de celui de Prévost et Hoeg.

- érouissage volumique variable : IECR=4

l'érouissage porte à la fois sur α et k , égaux à $(1+\eta) \alpha^0$ et $(1+\eta) k^0$, avec $\eta = h(\varepsilon_p^v)$

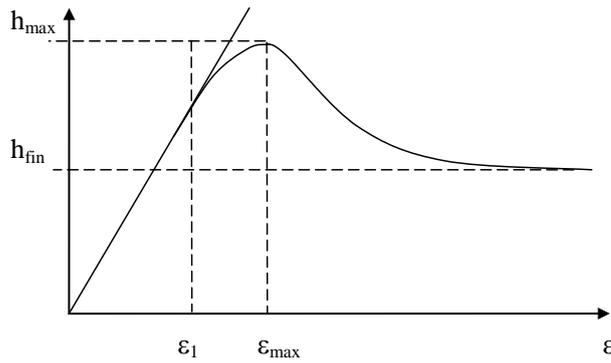
$$\text{On calcule } \varepsilon_1 = \frac{2 h_{\max}}{c} - \varepsilon_{\max} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{c^2}{4(c\varepsilon_{\max} - h_{\max})}$$

$$\text{si } x < \varepsilon_1 : \quad h(x) = c x \quad h'(x) = c$$

$$\text{si } \varepsilon_1 < x < \varepsilon_{\max} : \quad h(x) = c x - \alpha (x - \varepsilon_1)^2 \quad h'(x) = c - 2\alpha (x - \varepsilon_1)$$

$$\text{si } x > \varepsilon_{\max} : \quad h(x) = h_{\text{fin}} + (h_{\max} - h_{\text{fin}}) \exp \left[- \left(\frac{x - \varepsilon_m}{\beta} \right)^2 \right]$$

$$h'(x) = - \frac{2(x - \varepsilon_m)}{\beta^2} (h_{\max} - h_{\text{fin}}) \exp \left[- \left(\frac{x - \varepsilon_m}{\beta} \right)^2 \right] = - \frac{2(x - \varepsilon_m)}{\beta^2} (h - h_{\text{fin}})$$



paramètres à fournir : c , h_{\max} ; h_{fin} ; ε_{\max} ; β (tous sans dimension)

Notes :

1- il s'agit d'une variante du précédent, avec deux paramètres de plus de manière à pouvoir mieux représenter les résultats d'essais triaxiaux sur des matériaux réels. En particulier, on découple complètement les deux parties de la courbe à gauche et à droite du pic (en dehors du fait que la courbe est continue). Le paramètre β , en particulier, contrôle la décroissance après le pic.

2- les paramètres fournis par l'utilisateur doivent vérifier la condition : $2 h_{\max} < c \varepsilon_m$

(le code fait la vérification et interrompt le calcul si elle n'est pas respectée).

$$\text{Calcul du module d'écroutissage } H : H \lambda = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = - \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_v^p} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_v^p} \right) \lambda \text{ tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)$$

$$H = - (I_1 \alpha_0 - k_0) h'(\varepsilon_v^p) \text{ tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)$$

3- ce modèle n'est mentionné ici qu'à titre d'information. Il pourrait être amélioré pour mieux représenter l'allure de la courbe obtenue au cours d'un cisaillement traxiale et la réponse à des sollicitations cycliques (en combinant l'écroutissage volumique proposé ici avec un écroutissage cinématique non linéaire).

3.3.4.7. Critère du modèle Cam-Clay modifié (ICRIT=6)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = q^2 - M^2 p (p_c - p)$
avec $q = \sqrt{3} J_2$; $p = -I_1/3$; $p_c = \max(p_c^\circ, p_{cs})$
 p_{cs} est un paramètre stocké aux points de Gauss et reflète l'histoire du chargement subi

- Paramètres à fournir : M, p_c°

• Lois d'écroûissage pour le critère du modèle Cam Clay modifié :

- écroûissage volumique : IECR=1

$$p_c = p_c^\circ \exp\left(-\frac{(1+e_0) \varepsilon_v^p}{(\lambda-\kappa)}\right)$$

paramètres à fournir : λ, κ, e_0

Note : On demande de fournir λ, κ et e_0 mais la loi ne dépend en fait que de la valeur du groupement $(1+e_0)/(\lambda-\kappa)$. Par ailleurs, lorsque l'on associe ce modèle à l'élasticité non linéaire classiquement proposée pour le modèle Cam-Clay (IELAS=3 ci-dessus), il n'y a pas de vérification que les valeurs de κ et e_0 sont identiques pour la partie élastique et la loi d'écroûissage (qui sont traitées de manière indépendante dans le code). D'autre part, cette loi est identique à celle du modèle IMOD=18 de la version standard.

Note 2 : On rappelle que l'on utilise souvent une formulation du modèle non pas en termes de coefficients λ et κ , mais en termes d'index de compression (compression index) C_c et d'index de gonflement (swelling index) C_s . Les deux premiers sont introduits dans le contexte d'essais de compression isotrope et sont plus proches de la présentation du Cam-Clay donnée par Wood (1990), les deux autres sont plutôt relatifs à des essais oedométriques. On considère généralement qu'on peut prendre

$$C_c = 2,3 \lambda ; C_s = 2,3 \kappa$$

- écroûissage volumique et déviatorique : IECR=3

L'introduction d'un écroûissage déviatorique permet de modéliser la remontée de l'état de contraintes le long de la ligne d'état critique en condition non drainée (le modèle peut cependant donner une limite sur la contrainte de cisaillement selon la valeur de β).

$$p_c = p_c^\circ \exp\left(-\frac{(1+e_0) \varepsilon_v^p}{(\lambda-\kappa)} - \beta \varepsilon_d^p\right)$$

paramètres à fournir : $\lambda, \kappa, e_0, \beta$

- écroûissage volumique avec pression de préconsolidation initiale linéaire avec la profondeur: IECR=6

Ce modèle correspond au même type d'écroûissage volumique que le modèle IECR=1, mais permet de prendre en compte une pression de préconsolidation initiale (le paramètre qui définit la taille de l'ellipse) qui varie avec la profondeur suivant :

$$p_c^{ini} = \text{Max}(p_c^\circ, p_{cz} + Dp_c z)$$

où z désigne la coordonnée suivant la verticale ascendante, et les deux paramètres p_{cz} et Dp_c décrivent les variations de la préconsolidation initiale avec la profondeur. Attention au signe de Dp_c : la valeur de Dp_c doit être négative si l'on veut prendre en compte une augmentation de p_c lorsque la profondeur augmente.

L'évolution du paramètre d'écroûissage est donnée par :

$$p_c = p_c^{ini} \exp\left(-\frac{(1+e_0) \varepsilon_v^p}{(\lambda-\kappa)}\right)$$

paramètres à fournir : $p_{cz}, Dp_c, \lambda, \kappa, e_0$

- prise en compte d'un rapport de surconsolidation OCR : IECR=7

Ce modèle correspond au même type d'érouissage volumique que le modèle IECR=1, mais permet de prendre en compte une pression de préconsolidation initiale (le paramètre qui définit la taille de l'ellipse) définie par un rapport de préconsolidation OCR (pour Over Consolidation Ratio) :

$$p_c^{ini} = \text{Max} (p_c^o, \text{OCR } p_c^{ref})$$

où p_c^{ref} est la valeur de la pression de préconsolidation calculée à partir de l'état de contraintes initial géostatique, par

$$p_c^{ref} = q^2 / M^2 p + p$$

Lorsque les contraintes sont géostatiques et qu'on se place à proximité de la surface, p est nul. On lève cette difficulté en convenant que la valeur de p_c^{ref} n'est évaluée que si p est supérieur à une valeur minimale ; au voisinage de la surface, on prendra donc $p_c = p_c^o$.

L'évolution du paramètre d'érouissage est donnée par :

$$p_c = p_c^{ini} \exp \left(- \frac{(1+e_o) \varepsilon_v^p}{(\lambda-\kappa)} \right)$$

paramètres à fournir : OCR, λ , κ , e_o

3.3.4.8. Critère parabolique (ICRIT=7)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = J_2 + (R_c - R_t) I_1/3 - R_c R_t /3$
- Paramètres à fournir : R_c, R_t
- Lois d'érouissage pour le critère parabolique : aucune

3.3.4.9. Critère de Hoek Brown généralisé (ICRIT=14)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} \right)^{1/\alpha} - (m \sigma_3 / \sigma_c + s)$
- Paramètres à fournir : σ_c, s, m, α
- Lois d'érouissage pour le critère de Hoek Brown généralisé : aucune

3.3.4.10. Critère orienté (ICRIT=11)

- Formulation : $|\underline{\tau}| < \sigma \tan \varphi + c$
 où σ désigne la contrainte normale sur une facette de normale \underline{n}
 et $|\underline{\tau}|$ la norme de la composante tangentielle du vecteur contrainte
 $\sigma = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$; $|\underline{\tau}| = |\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - \sigma \cdot \underline{n}|$

Note : ce critère délimite un espace plus grand que celui de Mohr-Coulomb pour les mêmes valeurs de c et φ , parce que la vérification ne porte que sur les facettes présentant une certaine orientation. D'autre part, il est manifestement anisotrope.

- Paramètres à fournir :
 en 2D : c, φ, α (α est l'angle de la normale \underline{n} avec l'horizontale)
 en 3D : $c, \varphi, n_x, n_y, n_z$ (on donne les composantes de la normale \underline{n})
- Lois d'érouissage pour le critère orienté : aucune

3.3.4.11. Critère orienté – fractures en chevrons (ICRIT=12)

Il s'agit d'un modèle proposé par A. Pouya pour modéliser les fractures dans la zone proche d'une excavation dans les argilites (voir aussi le modèle élastique correspondant IELAS=9 ou 10 ci-dessus). Localement, le critère de résistance est le critère orienté du paragraphe précédent, mais l'orientation des facettes sur lesquelles on calcule les contraintes normale et tangentielle varie d'un point à l'autre : le modèle prend en compte la résistance des fractures en utilisant le critère orienté en tenant compte des variations d'un point à l'autre du maillage de l'orientation de la normale aux fractures.

Ce critère n'est pas disponible en déformation plane.

En condition axisymétrique, l'axe de révolution est nécessairement l'axe vertical ($r=0$) du maillage et on donne simplement l'angle α entre la direction radiale e_r et la normale au plan d'isotropie tangent aux fractures. En condition tridimensionnelle, on donne les trois coordonnées (x,y,z) d'un point de l'axe de révolution, deux angles α et β définissant un vecteur unitaire orienté de l'axe $\underline{u} = (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$, et un dernier angle γ permettant de représenter l'ouverture des cônes. Pour un point courant M , on calcule son projeté P sur l'axe, et on note \underline{v} le vecteur unitaire porté par PM . La normale au plan tangent aux fractures est donnée par $\underline{v} [-\sin \gamma] + \underline{u} [\cos \gamma]$.

- Formulation : $|\underline{\tau}| < \sigma \tan \varphi + c$
 où σ désigne la contrainte normale sur une facette de normale \underline{n}
 et $|\underline{\tau}|$ la norme de la composante tangentielle du vecteur contrainte
 $\sigma = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$; $|\underline{\tau}| = |\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma \cdot \underline{n}|$
- Paramètres à fournir :
 en axisymétrie: c, φ, α (α est l'angle de la normale \underline{n} avec la radiale)
 en 3D :
 $c, \varphi,$
 x, y, z (coordonnées d'un point de l'axe de symétrie de révolution),
 α, β (deux angles donnant l'orientation de l'axe),
 γ (angle d'ouverture des cônes)
- Lois d'érouissage : **aucune**

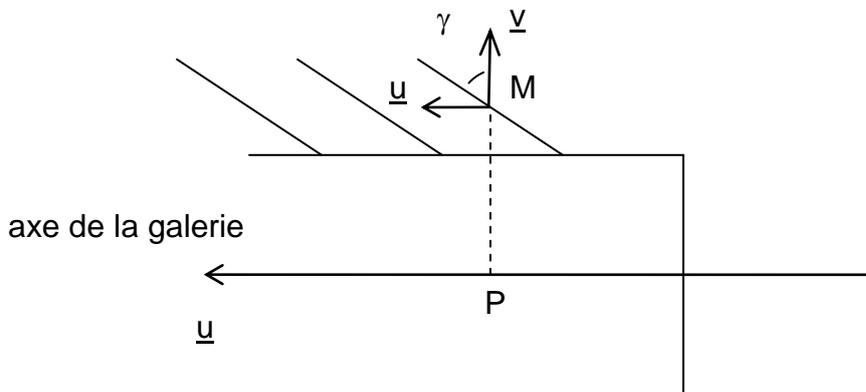


Figure 2 – Définition de la géométrie des fractures en chevrons

Note : pour des fractures orientées comme sur la figure (avec le sommet des cônes du côté du front de taille de la galerie), l'angle γ prend une valeur positive. Si on change l'orientation de l'axe de la galerie, la valeur de γ correspondant à la même géométrie de fractures est négative.

jeux de données : chevr_ocr12.data et chvr3_ocr12.data.

3.3.4.12. Critère de Hill (ICRIT=22)

Un modèle permettant de prendre en compte une anisotropie des caractéristiques de résistance a été proposé par Hill (1947). La formulation adoptée ici est reprise du mode d'emploi du logiciel DIANA :

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^T P \sigma} - \sigma_{ref}$$

où

σ désigne le vecteur formé par les composantes du tenseur des contraintes

$$\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$$

σ_{ref} désigne une contrainte scalaire de référence

et P désigne la matrice définie par :

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \alpha_{12} + \alpha_{13} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{12} & \alpha_{23} + \alpha_{12} & -\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & \alpha_{13} + \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{66} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{44} \\ \alpha_{55} \\ \alpha_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2(\sigma_{ref}/\sigma_{y,xx})^2 \\ 2(\sigma_{ref}/\sigma_{y,yy})^2 \\ 2(\sigma_{ref}/\sigma_{y,zz})^2 \\ (\sigma_{ref}/\sigma_{y,xy})^2 \\ (\sigma_{ref}/\sigma_{y,yz})^2 \\ (\sigma_{ref}/\sigma_{y,zx})^2 \end{bmatrix}$$

Les paramètres $\sigma_{y,xx}$, $\sigma_{y,yy}$, $\sigma_{y,zz}$ représentent les seuils de plasticité en traction simple dans les directions x, y et z du matériau, et $\sigma_{y,xy}$, $\sigma_{y,yz}$, $\sigma_{y,zx}$ les contraintes maximales en cisaillement simple (le premier indice y signifiant « yield »).

Note 1 : Pour $\sigma_{y,xx} = \sigma_{y,yy} = \sigma_{y,zz} = k\sqrt{3}$ et $\bar{\sigma} = \sigma_{y,xy} = \sigma_{y,yz} = \sigma_{y,zx} = k$, on trouve : $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{44} = \alpha_{55} = \alpha_{66} = 1/3$ et

$$P = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

qui permet de retrouver le critère de von Mises.

Note 2 : en pratique, dans CESAR, on préfère écrire le critère sous la forme :

$$f(\sigma) = 3/2 \sigma^t P \sigma - \sigma_{ref}^2$$

de manière à simplifier le calcul des dérivées du critère (en supprimant la racine carrée).

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = 3/2 \sigma^t P \sigma - \sigma_{ref}^2$
- Paramètres à fournir : en 2D : $\sigma_{y,xx}, \sigma_{y,yy}, \sigma_{y,zz}, \sigma_{y,xy}, \sigma_{y,yz}, \sigma_{y,zx}, \sigma_{ref}, \psi$
en 3D : $\sigma_{y,xx}, \sigma_{y,yy}, \sigma_{y,zz}, \sigma_{y,xy}, \sigma_{y,yz}, \sigma_{y,zx}, \sigma_{ref}, \psi, \theta, \varphi$
- Lois d'écoulement pour le critère de Hill : aucune

Les paramètres décrivant l'orientation du matériau sont décrits dans l'annexe 15.1.

3.3.4.13. Critère de Hill modifié (ICRIT=23)

Il peut être difficile pour certains matériaux de déterminer la résistance en traction dans une direction (par exemple, dans la direction perpendiculaire à une plaque métallique issue d'un laminage).

On peut préférer donner la résistance obtenue dans le plan de la plaque, dans une direction oblique par rapport aux axes, par exemple la limite en traction pour une sollicitation orientée à 45 degrés dans le plan (x,y). On utilise la même matrice P, mais les coefficients sont calculés suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2(\sigma_{ref}/\sigma_{y,xx})^2 \\ 2(\sigma_{ref}/\sigma_{y,yy})^2 \\ 2(\sigma_{ref}/\sigma_{y,45})^2 \\ (\sigma_{ref}/\sigma_{y,xy})^2 \end{bmatrix}; \alpha_{55} = \alpha_{66} = 0$$

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = 3/2^t \sigma P \sigma - \sigma_{ref}^2$
- Paramètres à fournir : en 2D : $\sigma_{y,xx}, \sigma_{y,yy}, \sigma_{y,45}, \sigma_{y,xy}, \sigma_{ref}, \psi$
en 3D : $\sigma_{y,xx}, \sigma_{y,yy}, \sigma_{y,45}, \sigma_{y,xy}, \sigma_{ref}, \psi, \theta, \varphi$

• **Lois d'érouissage pour le critère de Hill modifié : aucune**

Les paramètres décrivant l'orientation du matériau sont décrits dans l'annexe 15.1.

3.3.4.14. Critère de Hill Lourenço (ICRIT=28)

Une autre version du critère de Hill a été programmée dans CESAR. L'expression générale du critère défini précédemment est conservée :

$$f(\sigma) = 3/2^t \sigma P \sigma - \sigma_{ref}^2$$

avec la matrice P suivante :

$$P = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/\Sigma_{11}^2 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1/\Sigma_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\Sigma_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La surface de charge est représentée par un ellipsoïde dans l'espace des contraintes ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$).

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = (\sigma_{11}/\Sigma_{11})^2 + (\sigma_{22}/\Sigma_{22})^2 + (\sigma_{12}/\Sigma_{12})^2 + \beta (\sigma_{11}\sigma_{22} / \Sigma_{11}\Sigma_{22}) - 1$
- Paramètres à fournir : en 2D : $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \beta, \Sigma_{12}, \psi$
en 3D : $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \beta, \Sigma_{12}, \psi, \theta, \varphi$

• **Lois d'érouissage pour le critère de Hill Lourenço : aucune**

Les paramètres décrivant l'orientation du matériau sont décrits dans l'annexe 15.1.

3.3.4.15. Critère de Hill Lourenço (ICRIT=29)

Il s'agit d'une variante du précédent dans laquelle on a ajouté une dimension.

- Formulation :
$$f(\underline{\sigma}) = (\sigma_{11}/\Sigma_{11})^2 + (\sigma_{22}/\Sigma_{22})^2 + (\sigma_{33}/\Sigma_{33})^2 + (\sigma_{12}/\Sigma_{12})^2 + (\sigma_{23}/\Sigma_{23})^2 + (\sigma_{13}/\Sigma_{13})^2 + \beta (\sigma_{11}\sigma_{22} / \Sigma_{11}\Sigma_{22}) - 1$$
- Paramètres à fournir : en 2D : $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \beta, \Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{13}, \psi$
en 3D : $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \beta, \Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{13}, \psi, \theta, \varphi$

• **Lois d'écouissage pour le critère de Hill Lourenço (variante) : aucune**

Les paramètres décrivant l'orientation du matériau sont décrits dans l'annexe 15.1.

3.3.4.16. Critère arrondi basé sur le modèle de Menetrey et Willam (ICRIT=16)

Menetrey et Willam ont proposé, pour des matériaux de type béton, une forme régulière du critère de rupture en fonction des trois invariants :

$$F = (A\rho)^2 + m (B \rho r + C I_1/\sqrt{3}) - c$$

où

$$\rho = \sqrt{2 J_2}, I_1 = \text{tr } \underline{\underline{\sigma}}$$

A, m, B, C et c sont des caractéristiques matérielles,

r est une fonction de l'angle de Lode θ et d'un paramètre d'excentricité e :

$$r(\theta, e) = [4 (1-e^2) \cos^2(\theta) + (2e-1)^2] / [2 (1-e^2) \cos \theta + (2e-1) \{4(1-e^2) \cos^2(\theta) + 5 e^2 - 4\}^{1/2}]$$

$$(\text{rappel : } \cos(3\theta) = 3 \sqrt{3} J_3 / (2 J_2^{3/2}), \text{ avec } J_2 = 1/2 \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \text{ et } J_3 = 1/3 \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^3))$$

La fonction r représente la trace du critère dans le plan déviatorique. Il est facile de voir que si e=1, la distance entre la surface de rupture et l'axe isotrope est indépendant de θ . Pour que la surface reste convexe, il faut de plus choisir e strictement supérieur à 0,5. Pour e=0,5, la trace de la surface dans le plan déviatorique n'est plus régulière.

La fonction F permet, moyennant un choix judicieux des paramètres, de retrouver un certain nombre de critères proposés par d'autres dans la littérature (critères de Drucker Prager, Rankine, Huber-Mises). En particulier, on peut obtenir un critère qui ressemble à celui de Mohr-Coulomb, mais qui correspond à un domaine de résistance dont la frontière est régulière, en prenant :

$$A = 0 ; e = (3 - \sin \varphi) / (3 + \sin \varphi) ; B = (3 - \sin \varphi) / (\sqrt{24} \cos \varphi) ; C = \tan(\varphi) / \sqrt{3} ; m = 1$$

Le paramètre c est la cohésion au sens du modèle de Mohr-Coulomb.

Cette fonction prend la même valeur que celle de Mohr Coulomb pour les points où deux des contraintes principales sont égales (autrement dit la surface de charge passe par les arêtes du cône de Mohr Coulomb). La proximité du critère avec celui de Mohr-Coulomb dépend de φ : pour $\varphi = 0$, on trouve e=1 et donc le critère dégénère en critère de von Mises.

Note 1 : la formulation complète pourrait être utilisée pour représenter le comportement des bétons, à condition de compléter la programmation actuelle.

• Formulation : $f(\underline{\underline{\sigma}}) = (B \rho r(\theta, e) + C I_1/\sqrt{3}) - c$
 avec $\rho = \sqrt{2 J_2}, I_1 = \text{tr } \underline{\underline{\sigma}}, B = \frac{3 - \sin \varphi}{\sqrt{24} \cos \varphi} ; C = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{3}}$

• Paramètres à fournir : c, φ

• Lois d'érouissage pour le critère de Menetrey et Willam : aucune

3.3.4.17. Critère arrondi basé sur le modèle de Bigoni-Piccolroaz (ICRIT=17)

Bigoni et Piccolroaz ont proposé un modèle qui dépend du troisième invariant :

$$F(\sigma) = f(p) + q g(\theta)$$

Dans cette expression, $f(p)$ est la fonction « méridienne » :

$$f(p) = -M p_c \sqrt{(\Phi - \Phi^m) [2(1-\alpha) \Phi + \alpha]} \quad \text{si } \Phi \in [0,1] \quad \text{et } f(p) = +\infty \quad \text{sinon}$$

avec $\Phi = (p+c)/(p_c+p)$.

La fonction 'déviatorique' $g(\theta)$ est donnée par :

$$g(\theta) = \cos(\beta\pi/6 - 1/3 \arccos(\gamma \cos(3\theta)))$$

On arrive donc au total à un modèle à 7 paramètres qui doivent respecter les conditions suivantes : $p_c > 0$, $\alpha \in]0,2[$, $m > 1$, $M > 0$, $\beta \in [0,2]$ et $\gamma \in [0,1[$.

La fonction de charge ainsi définie est définie et régulière.

Le paramètre β permet de se rapprocher plus ou moins de l'hexagone dans le plan déviatorique. En faisant tendre le paramètre γ vers 1, on se rapproche d'un critère anguleux.

Pour obtenir un critère proche de celui de Mohr-Coulomb, les auteurs proposent de prendre :

$$\alpha = 0 ; p_c = f_c \text{ (limite en compression)} = 2c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi) ; M = 3 [r \cos(\beta\pi/6 - \pi/3) - \cos(\beta\pi/6)] / [\sqrt{2} (r+1)]$$

$$c = f_c [\cos(\beta\pi/6 - \pi/3) - \cos(\beta\pi/6)] / [3r \cos(\beta\pi/6 - \pi/3) - 3 \cos(\beta\pi/6)]$$

$$r = f_t/f_c = 1 - \sin \varphi / (1 + \sin \varphi) ; \beta\pi/6 = \arctan(\sqrt{3} / (2r+1)) ; \gamma \rightarrow 1 ; m \rightarrow \infty$$

• Paramètres à fournir : c, φ, γ, n

• Lois d'érouissage pour le critère de Bigoni et Piccolroaz : aucune

Note : Du point de vue de l'implantation dans CESAR, le traitement ressemble beaucoup à celui du critère précédent. On prendra garde au fait que si l'on prend γ très proche de 1, il peut se produire des instabilités numériques autour des arêtes du critère : on a alors intérêt à tester soigneusement l'influence de la taille des incréments de chargement.

Comme pour le précédent, il serait fructueux de revenir à la formulation complète pour modéliser des comportements de type béton. Cela dit, la formulation mathématique paraît complexe. Il est possible que le critère du modèle HiSS supplante avantageusement les deux critères de Menetrey Willam et de Bigoni Piccolroaz.

3.3.4.18. Critère du modèle Egg Cam Clay (ICRIT=19)

Ce critère est une variante du modèle Cam clay modifié qui permet de décaler le domaine élastique pour autoriser des tractions, et prendre en compte une forme plus allongée de la surface de charge dans la partie frottante. D'autre part, on l'a équipé d'une loi d'écroissage particulière, dans laquelle la taille du domaine élastique ne peut pas diminuer.

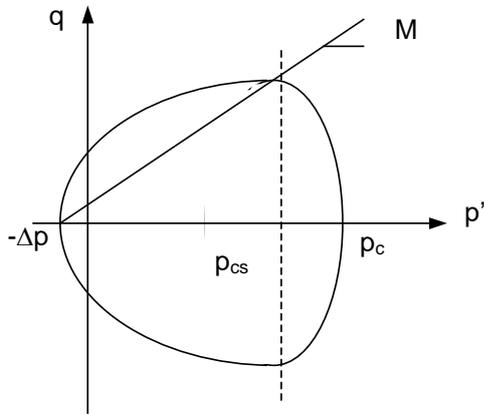


Figure 3 – Définition de la surface de charge du modèle Egg Cam Clay

p_{cs} est choisi de manière à ce que le rapport entre les demi-axes horizontaux des deux demi-ellipses soit constant et égal à α : $(p_c - p_{cs}) = \alpha (p_{cs} + \Delta p)$ ($\alpha < 1$)

- Formulation : $f(\underline{\sigma}) = q^2 + M^2 (p + \Delta p)(p - \Delta p - 2p_{cs})$ si $p < p_{cs}$
 $f(\underline{\sigma}) = q^2 + M^2 (p + p_c - 2p_{cs})(p - p_c)$ si $p \geq p_{cs}$
- Paramètres à fournir : $M, p_{c0}, \Delta p, \alpha$

• Lois d'écroissage pour le Egg Cam Clay :

- écroissage volumique du Cam-Clay : IECR=1 (voir ICRIT=6)

$$p_c = p_c^0 \exp\left(-\frac{(1+e_0) \varepsilon_v^p}{(\lambda-\kappa)}\right)$$

paramètres à fournir : λ, κ, e_0

- écroissage volumique du côté compression seulement : IECR=2

$$dp_c = 0 \quad \text{si } p < p_{cs}$$

$$dp_c = p_c \left(-\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa}\right) d\varepsilon_v^p \quad \text{si } p > p_{cs}$$

paramètres à fournir : λ, κ, e_0

3.3.4.19. Critère du modèle HiSS (ICRIT=24)

Ce critère est une partie d'un modèle proposé par Shao et Desai (2000), appelé Hierarchical Single Surface model, pour traiter de manière générale du comportement cyclique et dynamique des sols saturés. Il présente une surface de charge qui dépend des invariants du tenseur des contraintes, et combine une partie frottante (voisine du modèle de Mohr Coulomb ou de Drucker Prager) et une partie contractante (similaire à celle du Cam-Clay). Il prend en compte le troisième invariant de manière nettement plus simple que les modèles de Menetry-Willam ou Bigoni-Piccolroaz.

- Formulation :
$$f(\underline{\sigma}) = \frac{J_{2d}}{p_a^2} - [\gamma \left(\frac{J_1^*}{p_a}\right)^2 - \alpha \left(\frac{J_1^*}{p_a}\right)^n] / \sqrt{1-\beta S}$$

avec $n > 2$, $S = \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$, $J_1^* = \text{tr } \underline{\sigma} + 3R$
- paramètres à fournir : $\gamma \beta \quad n \quad R \quad \alpha_0 \quad p_a$

Note : S varie entre -1 et 1 (les deux valeurs extrêmes correspondent au cas où deux des contraintes principales sont égales). Du côté de la pointe, l'ouverture de la surface est contrôlée par le paramètre γ (analogue à un facteur près au facteur α du critère de Drucker Prager si $\beta = 0$). Le paramètre β contrôle le rapport entre la limite en compression et la limite en extension. Le paramètre α du modèle Hiss contrôle la taille de la surface de charge.

• Lois d'érouissage pour le critère du modèle HiSS :

- érouissage volumique : IECR=1

$$\alpha = \alpha_0 \exp(-\lambda \cdot \varepsilon_v^p)$$

paramètres à fournir : λ

- érouissage volumique et déviatorique : IECR=2

$$\alpha = \alpha_0 \exp(-\lambda \varepsilon_v^p - \mu \varepsilon_d^p)$$

paramètres à fournir : λ, μ

ε_d^p est obtenu par intégration de $\dot{\varepsilon}_d^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}_d^p : \dot{\underline{\varepsilon}}_d^p\right)^{1/2}$

3.3.4.20. Critère du modèle HiSS modifié (ICRIT=30)

On peut simplifier la formulation du critère précédent pour faire mieux apparaître les paramètres qui contrôlent la forme de la surface de charge.

- Formulation :
$$f(\underline{\sigma}) = J_2 - \gamma p^2 [1 - (p/p_c)^m] / \sqrt{1-\beta S}$$

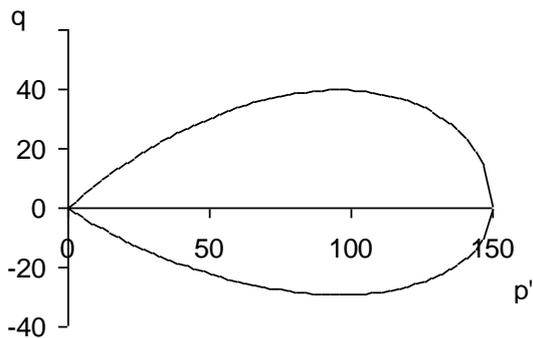
avec $p = -\frac{1}{3} \text{tr } (\underline{\sigma}) + R$; $m > 0$; $S = \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$
- paramètres à fournir : $\gamma \quad m \quad p_c^\circ$ (valeur initiale de p_c) $R \quad \beta$

• Lois d'érouissage pour le critère du modèle HiSS modifié :

- érouissage volumique : IECR=1

$$p_c = p_c^\circ \exp(-A \varepsilon_v^p)$$

paramètres à fournir : A



Valeurs des paramètres :

$$p_c=150, \beta = 0,3 ; \gamma = 0,2 ; m =0,5$$

Figure 4 – Trace de la surface de charge du modèle Hiss pour $S=1$ et $S=-1$.

Notes :

Le domaine élastique est limité, sur l'axe des contraintes isotropes, par $p=0$ et $p = p_c$.

Le paramètre m contrôle la forme du cap du coté des compressions isotropes : plus m est grand, moins la partie droite de la surface de charge est arrondie. On évitera de prendre une valeur de m trop grande, parce la surface de charge devient anguleuse, et le traitement numérique est moins performant.

Pour $\beta = 0$, au voisinage de la pointe, le terme en p^m devient négligeable devant 1, et la pente de la courbe $q-p$ tend vers $\sqrt{3\gamma}$ (ce qui permet d'ajuster γ pour retrouver une surface tangente à celle du modèle de Drucker Prager par exemple).

L'état critique ($dq/dp = 0$) correspond à $\frac{p}{p_c} = \left[\frac{2}{m+2} \right]^{1/m}$

Les états critiques sont alignés sur une droite de pente :

$$\sqrt{3\gamma \frac{m}{m+2}}$$

Note : si on prend en compte le troisième invariant, on obtient, au voisinage de la pointe, une surface proche du critère de Mohr-Coulomb en compression comme en extension en ajustant les paramètres β et γ :

$$J_2 = q^2/3 = \frac{\gamma p^2}{\sqrt{1-\beta S}}$$

avec $S = -1$ en compression et $S = +1$ en extension.

Avec Mohr Coulomb, on a $q = \frac{6 \sin \varphi}{3 + \beta \sin \varphi} p$

ce qui conduit à choisir : $\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ avec $\alpha = \frac{3 + \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$; et $\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta}}{3} \left(\frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \right)^2$

On choisira aussi $R = c \cotan \varphi$.

3.3.4.21. Modèle S-Clay 1 (ICRIT=26)

Le modèle S-Clay 1 a été proposé par Wheeler et al (2003) pour rendre compte de l'anisotropie des propriétés de résistance induite par le chargement subi par une argile. Il s'agit d'un modèle complexe, présenté en détail dans l'annexe 0. Il paraît constituer une piste prometteuse, mais semble encore difficile à maîtriser.

- Formulation : $3/2 (\underline{s}-p \underline{a}^*) : (\underline{s}-p \underline{a}^*) - (M^2 - 3/2 \underline{a}^* : \underline{a}^*) (p_m-p) p$
- paramètres à fournir : M, p_{m0}, k_0

Le paramètre k_0 sert à initialiser la valeur de \underline{a}^* . voir l'annexe 0 consacrée à ce modèle

• Lois d'érouissage pour le critère du modèle S-CLAY 1 :

- loi d'érouissage du S-Clay 1 (IECR=1)

Il s'agit de décrire l'évolution de p_m et de la variable tensorielle \underline{a}^* .

$$p_m = p_{m0} \exp \left[-\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v \right]$$

$$\alpha_0 = \frac{\eta_{k_0}^2 + 3\eta_{k_0} - M^2}{3}, \quad \eta_{k_0} = \frac{3(1 - K_0)}{1 + 2 K_0}$$

$$d\alpha = \mu [\{ \chi_v - \alpha \} <d\varepsilon_v^p> + \beta \{ \chi_d - \alpha \} d\varepsilon_d^p]$$

$$\chi_v = \frac{3 \underline{s}}{4 p}; \quad \chi_d = \frac{\underline{s}}{3 p}; \quad <d\varepsilon_v^p> = d\varepsilon_v^p \text{ si } d\varepsilon_v^p < 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

$$\beta = \frac{3(4M^2 - 4\eta_{k_0}^2 - 3\eta_{k_0})}{8(\eta_{k_0}^2 + 2\eta_{k_0} - M^2)}$$

- Paramètres à fournir : $\lambda, \kappa, e_0, \mu$

3.3.4.22. Modèle de sol renforcé par géogridde : Tensor Stabilized Soil Model (ICRIT=51/52)

La société Tensor a développé un modèle de plasticité hétérogène non associé pour les sols renforcés par géogriddes. Le modèle prend en compte la position de la grille et une distance sur laquelle son influence se fait sentir. Dans le cadre des modèles à composantes, le modèle comporte deux aspects : un critère et un potentiel plastique spécifiques, qui correspondent aux valeurs ICRIT=51 et ICRIT=52.

L'utilisation de ce modèle fait l'objet de dispositions contractuelles particulières. On se rapprochera de la société Itech pour les modalités d'utilisation.

3.3.5. Prise en compte d'inclusions de renforcement par homogénéisation

Le modèle IMOD=43 permet de prendre en compte par une procédure d'homogénéisation la présence d'inclusions de renforcement dans un massif dont le comportement est décrit par le modèle de Drucker Prager. On peut reconduire le même type de modèle mécanique, mais en attribuant à la phase matrice n'importe lequel des modèles de comportement que l'on peut mettre en œuvre dans le cadre des modèles « à composantes ». On peut aussi envisager de donner aux inclusions de renforcement un comportement plus complexe.

On suppose à nouveau qu'il y a adhérence parfaite entre le sol et les inclusions (au sens où leur déplacement moyen est le même).

La structure proposée consiste à fournir, à la suite des lignes qui décrivent le comportement élastoplastique de la matrice, les lignes suivantes, dédiées au comportement et à la disposition géométrique des inclusions de renforcement :

RENF

Un indicateur entier ICOMP relatif au comportement des inclusions + les valeurs des paramètres pour ce modèle

Un indicateur entier IGEOM relatif à la disposition spatiale des inclusions + les valeurs des paramètres ad hoc

3.3.5.1. Comportement des inclusions

Le comportement de la « phase » qui représente globalement les inclusions de renforcement est décrit par un indicateur entier ICOMP. Pour le moment, deux cas sont prévus :

- celui de l'élasticité linéaire, qui correspond à ICOMP=1, et pour lequel il faut donner deux paramètres : le module du matériau constitutif des inclusions et l'aire de la section d'une inclusion ;
- celui du comportement élastique linéaire parfaitement plastique (ICOMP=2) : on donne en plus la contrainte limite en traction du matériau constituant les inclusions, et le rapport entre la limite en compression et la limite en traction d'une inclusion (ce qui permet, si on le juge nécessaire, d'interdire les efforts de compression dans les inclusions).

Deux autres comportements ont été programmés mais sans que leur programmation ait été entièrement validée : un comportement élastique-fragile, qui conduit à un report des efforts des inclusions vers le sol lorsque l'on dépasse un seuil en contrainte ; et un comportement qui permet de modéliser la succession d'une phase linéaire, d'une phase de déformation plastique et d'une rupture fragile des inclusions au-delà d'un certain allongement plastique.

Les modèles fragiles restent à tester car le caractère fragile donne des reports de forces entre nœuds qui rendent les calculs instables.

valeur de ICOMP	description	paramètres à fournir
1	élasticité linéaire	K : module du matériau constitutif des inclusions SA : aire de la section d'une inclusion
2	élasticité linéaire + plasticité parfaite	K, SA : comme ICOMP=1, S : contrainte limite en traction simple du mat. constitutif

		ETA : rapport limite en compression / limite en traction
3	élasticité linéaire + comportement fragile	K, SA : comme ICOMP=1 S, ETA : comme ICOMP=2
4	élasticité linéaire + plasticité parfaite + fragilité	K, SA idem ICOMP=1, S, ETA : comme ICOMP=2 DPMT, DPMC : déformations plastiques maximales en traction et en compression

3.3.5.2. Disposition spatiale des inclusions

IGEOM est un indicateur entier qui représente la disposition géométrique des inclusions de la famille que l'on est en train de décrire. Les paramètres à fournir dépendent de la valeur de NDIM et INAT. Les paramètres ont le même sens que pour le modèle « classique » IMOD=43 (cf. 0).

NDIM= 2 ; INAT = 1

valeur de IGEOM	nom	paramètres à fournir
1	renforcement homogène	α , FV
2	renforcement radial	X, Y, FV

NDIM=2 ; INAT = 2

valeur de IGEOM	Nom	paramètres à fournir
1	renforcement homogène	FV
2	renforcement radial	FV
3	renforcement divergent cylindrique	α , FV
4	renforcement divergent sphérique	Z, FV

NDIM=3

valeur de IGEOM	nom	paramètres à fournir
1	renforcement homogène	α , β , FV
2	renforcement radial	X, Y, Z, α , β , FV
3	renforcement divergent cylindrique	X, Y, Z, α , β , γ , FV
4	renforcement divergent sphérique	X,Y,Z, FV

3.3.6. Calculs en condition non drainée

On peut imposer que l'évolution d'un groupe d'éléments est non drainée, en ajoutant une ligne du type

NDR K_w n

où K_w est le module de compression du fluide saturant (de l'ordre de 2GPa pour de l'eau, mais il peut être indiqué de minorer cette valeur pour éviter des difficultés numériques et/ou tenir compte d'une compressibilité accrue par la présence d'air dissous) ; n est la porosité du milieu.

Note : il n'est pas nécessaire en pratique de connaître n et K_w avec une grande précision ; il suffit que K_w/n soit sensiblement plus grand que le module de compression du matériau en condition drainée.

Cette fonctionnalité donne en sortie des incréments de pression interstitielle. L'utilisation de l'option PRS du module MCNL permet de reconstituer un champ de charge hydraulique en vue d'un calcul d'écoulement ultérieur.

3.4. Modèles à plusieurs mécanismes plastiques

Les mots-clés CRT2, POT2, ECR2 permettent de définir un deuxième mécanisme plastique éventuel. Les mêmes fonctions peuvent être utilisées comme critères et comme potentiels. Un petit nombre de combinaisons de deux mécanismes sont programmées (à détailler).

3.5. Comportement cyclique

A titre exploratoire, pour les applications dans lesquelles le sol subit un chargement cyclique, on s'est intéressé à la prise en compte d'un écrouissage cinématique non linéaire. Pour pouvoir effectuer des tests de mise au point dans de bonnes conditions, on a choisi de définir de nouvelles valeurs de l'indicateur ICRIT, mais on aurait pu compléter la programmation des modèles ICRIT=2 et ICRIT=5.

Ces modèles permettent de représenter une accumulation progressive de déformation plastique au cours de cycles d'amplitude constante (rochet).

3.5.1.1. Critère de von Mises (ICRIT=25)

• Formulation : $f(\underline{\sigma}) = F(\underline{\sigma}-\underline{X})$ où $F(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{s}:\underline{s} - k^2$

• Paramètres à fournir : k

• Loi d'écrouissage :

- loi de Chaboche (ou Armstrong-Frederick) : IECR = 1

$$\dot{\underline{X}} = 2/3 C \dot{\underline{\epsilon}}^p - D \underline{X} \dot{\xi} \quad \text{avec} : \dot{\xi} = (2/3 \dot{\underline{\epsilon}}^p : \dot{\underline{\epsilon}}^p)^{1/2}$$

paramètres à fournir : C, D

Note : la démarche n'est pas encore aboutie. En particulier, on devrait en principe faire figurer une valeur initiale de X dans les paramètres à fournir.

3.5.1.2. Critère de Drucker Prager (ICRIT=27)

• Formulation : $f(\underline{\sigma}) = F(\underline{\sigma}-\underline{X})$ où $F(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k$

• Paramètres à fournir : c, φ

• Loi d'écrouissage :

- loi de Chaboche (ou Armstrong-Frederick) : IECR = 1

$$\dot{\underline{X}} = 2/3 C \dot{\underline{\epsilon}}^p - D \underline{X} \dot{\xi} \quad \text{avec} : \dot{\xi} = (2/3 \dot{\underline{\epsilon}}^p : \dot{\underline{\epsilon}}^p)^{1/2}$$

paramètres à fournir : C, D

Note : le modèle précédent est classique dans le cas des modèles cycliques. L'utilisation de la loi de Chaboche avec le critère de Drucker Prager est en revanche originale.

3.6. Hardening Soil Model (mécanisme frottant seulement)

3.6.1. Introduction

Le Hardening Soil Model est, comme son nom l'indique, un modèle de comportement élastoplastique écroissable pour les sols. On en trouve plusieurs présentations (parfois un peu différentes) dans Schanz et al (1999), ou dans la documentation du logiciel Plaxis qui a contribué à populariser et répandre ce modèle.

Il s'agit d'un modèle élastoplastique avec une élasticité non linéaire et deux mécanismes plastiques avec écroissage : un mécanisme frottant (ou déviatorique), avec une surface de charge similaire à celle du modèle de Mohr Coulomb par certains aspects, et un mécanisme contractant (ou isotrope), qui rend compte d'une déformation volumique de contraction lorsque la contrainte moyenne devient suffisamment forte.

Dans CESAR, seul le mécanisme déviatorique a été programmé jusqu'à présent.

3.6.2. Partie élastique du modèle (IELAS=5)

Elle a déjà été présentée dans la section 3.3.3.13. Il s'agit d'un modèle isotrope non linéaire, avec un coefficient de Poisson constant et un module d'Young qui dépend de la contrainte principale mineure :

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref} \left(\frac{\sigma_3 + c \cotan \varphi}{\sigma_{ref} + c \cotan \varphi} \right)^m$$

3.6.3. Critère de plasticité et loi d'écroissage (ICRIT=31 / ECR=1)

Le critère n'est pas régulier, et porte, comme celui de Mohr-Coulomb, sur les contraintes principales extrêmes. Il en résulte que la surface de charge est anguleuse.

$$p = -1/3 \operatorname{tr} \sigma \quad ; \quad q_a = \frac{q_f}{R_f}$$

$$E_{50} = E_{50}^{ref} \left(\frac{\sigma_3 \sin \varphi_p + c \cos \varphi_p}{p_{ref} \sin \varphi_p + c \cos \varphi_p} \right)^m$$

$$q_f = \frac{2 (\sigma_3 \sin \varphi_p + c \cos \varphi_p)}{1 - \sin \varphi_p}$$

Une des fonctions critères est donnée par :

$$f_{12} = \frac{2 q q_a}{E_i (q_a - q)} - 2 \frac{q}{E_{ur}} - \gamma^p \quad \text{avec } E_i = \frac{2 E_{50}}{2 - R_f}$$

ou encore, en prenant $q = \sigma_1 - \sigma_2$:

$$f_{12} = \frac{q_a (2 - R_f)}{E_{50}} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{q_a - (\sigma_1 - \sigma_2)} - 2 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E_{ur}} - \gamma^p$$

De manière analogue, on pose :

$$f_{13} = \frac{q_a (2 - R_f)}{E_{50}} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{q_a - (\sigma_1 - \sigma_3)} - 2 \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_{ur}} - \gamma^p$$

On reste dans le régime élastique tant que les deux conditions $f_{12} < 0$ et $f_{13} < 0$ sont vérifiées.

Le modèle fait intervenir 7 paramètres d'entrée : $c, \varphi_p, m, \sigma_{ref}, R_f, E_{ur}^{ref}, E_{50}^{ref}$

Loi d'écoulement

$$\sin \varphi_{cv} = \frac{\sin \varphi_p - \sin \psi_p}{1 - \sin \varphi_p \sin \psi_p}$$

$$\sin \varphi_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 - 2c \cotan \varphi_p}$$

$$\sin \psi_m = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_m \sin \varphi_{cv}}$$

Le potentiel pour le critère f_{12} est donné par :

$$g_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 - (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \sin \psi_m$$

L'angle de dilatance ψ_m dépend de σ_3 via φ_m . Il faudrait en tenir compte pour calculer les dérivées de g_{12} par rapport à σ , mais on ne le fait pas dans le HSM (voir formule 15 de la référence Schanz et al, 2009). D'autre part, le manuel de Plaxis-GiD) donne une règle plus complexe pour calculer ψ_m :

For $\sin \varphi_m < 3/4 \sin \varphi$:	$\psi_m = 0$	
For $\sin \varphi_m \geq 3/4 \sin \varphi$ and $\psi > 0$	$\sin \psi_m = \max \left(\frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_m \sin \varphi_{cv}}, 0 \right)$	(4.12)
For $\sin \varphi_m \geq 3/4 \sin \varphi$ and $\psi \leq 0$	$\psi_m = \psi$	
If $\varphi = 0$	$\psi_m = 0$	

where φ_{cv} is the critical state friction angle, being a material constant independent of density, and φ_m is the mobilised friction angle:

$$\sin \varphi_m = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3 - 2c \cot \varphi} \quad (4.13)$$

Enfin, pour éviter que le sol ne gonfle indéfiniment, l'utilisateur a la possibilité de définir un seuil au-delà duquel l'angle de dilatance est nul. Le seuil porte sur la valeur de l'indice des vides. Ce traitement complémentaire de la dilatance introduit trois paramètres en plus, qui sont la valeur initiale e_0 et les valeurs minimale et maximale e_{min} et e_{max} de l'indice des vides.

Loi d'érouissage

Il reste à décrire l'évolution du paramètre γ^p . Elle est définie (Schanz et al, 1999) par :

$$d\gamma^p = d\varepsilon_v^p / \sin \psi_m$$

3.6.4. Mise en œuvre dans CESAR

Le modèle HSM fait l'objet pour le moment d'un traitement spécifique. Le choix du critère implique l'utilisation de la loi d'écoulement spécifique décrite ci-dessous, et le mot POT n'a donc pas à figurer dans les données. De la même façon, le modèle est prévu pour fonctionner avec la loi d'érouissage du modèle original : on donne simplement le mot-clé ECR suivi de l'indicateur entier 1, sans donner de paramètre spécifique.

3.6.5. Limites de l'implantation du HSM dans CESAR

Il manque le deuxième mécanisme plastique et la gestion d'une éventuelle préconsolidation du sol.

3.7. Modèles d'endommagement

3.7.1. Généralités

Comme on l'a mentionné plus haut (cf. 2.7), les modèles d'endommagement visent à rendre compte d'une perte de raideur progressive d'un matériau à mesure qu'on le déforme. Il existe une littérature abondante sur le sujet, et la modélisation de ces phénomènes fait l'objet de nombreuses recherches (pour prendre en compte l'influence du caractère multiaxial du chargement, ou la restauration de la rigidité lorsqu'on referme les fissures, le caractère anisotrope de la perte de raideur etc.).

On adopte d'abord le point de vue le plus simple, celui de l'endommagement isotrope. Dans ce cadre, le tenseur des modules d'élasticité (sécant) est multiplié par un scalaire inférieur à 1 lorsque l'état d'endommagement du matériau évolue.

Les modèles d'endommagement ont été développés pour rendre compte du comportement non-linéaire de certains matériaux « quasi-fragiles », qui présentent un comportement linéaire jusqu'à un certain seuil (de déformation ou de contrainte), puis une perte de rigidité. La présentation donnée ci-dessous est volontairement très succincte. Elle s'appuie en particulier sur les synthèses proposées par Nedjar (1995) et Dal Pont et Tailhan (2009).

Un des premiers pas dans la prise en compte de l'endommagement est dû à Kachanov (1958), qui propose de décrire par une variable d'endommagement l'évolution des propriétés élastiques. Dans cette approche, le tenseur des contraintes est relié aux déformations par la loi de comportement suivante :

$$\sigma = (1-D) C : \varepsilon$$

où C est le tenseur des modules élastiques et d désigne la variable (scalaire) d'endommagement : d vaut 0 pour le matériau non endommagé et 1 pour le matériau complètement endommagé.

Cette approche a été développée ensuite par Lemaître et Chaboche (1985) dans un cadre thermodynamique, pour étudier l'endommagement des métaux sous l'effet de l'apparition de cavités puis leur coalescence.

La suite de la construction du modèle consiste à définir à quelle condition la variable d'endommagement évolue, et, le cas échéant, à donner la loi décrivant cette évolution. On note une certaine similarité avec la théorie de la plasticité, dans laquelle on définit un seuil de plasticité et une loi d'écoulement pour décrire l'évolution des déformations plastiques.

Dans l'approche ci-dessus, l'endommagement est représenté par une seule variable scalaire. Il existe des modèles d'endommagement plus complexes, dans lesquels l'endommagement est représenté par une variable tensorielle pour tenir compte d'une anisotropie de l'endommagement. Dans le cadre de notre étude, on choisit, au moins dans une première étape, de s'en tenir à une variable scalaire.

D'autre part, il est connu qu'au-delà d'un certain niveau d'endommagement, on observe un comportement radoucissant, qui conduit à une perte d'unicité de la solution (voir par exemple Jirasek, 2002, ou Giry, 2011). Pour surmonter cette difficulté, différentes approches sont possibles. On se limite ici à une approche locale, la dépendance au maillage étant gérée par une technique de régularisation simplifiée de type Hillerborg (c'est-à-dire que le traitement numérique du comportement local prend en compte explicitement la taille des éléments)..

Le modèle d'endommagement isotrope le plus connu est celui de Mazars, mais de nombreux autres modèles sont disponibles dans la littérature (par exemple celui d'Oliver).

Dans CESAR, les modèles d'endommagement ont été programmés dans le cadre des modèles « à composantes » (IMOD=10000). Dans ce cadre, les différents aspects du comportement mécanique sont associés à un mot-clé : ELAS pour la loi élastique, CRT pour le critère de plasticité, POT pour le potentiel plastique, etc. L'endommagement est associé à un mot-clé spécifique, ENDO, suivi d'un indicateur entier IENDO, qui représente le modèle d'endommagement choisi, et d'un nombre de paramètres qui dépend du modèle adopté.

La suite de cette section fait de larges emprunts à la thèse d'Omar Moreno Regan (2016).

3.7.2. Utilisation des modèles d'endommagement avec CESAR

La prise en compte de l'endommagement a été introduite dans le module MCNL qui regroupe l'essentiel des modèles mécaniques non linéaires en statique.

Le principe consiste à utiliser les lois de comportement « à composantes », en donnant dans le jeu de données CESAR à l'indicateur IMOD la valeur 10000. On définit ensuite une loi élastique isotrope linéaire à l'aide du mot-clé ELAS, puis la loi d'endommagement considérée, à l'aide du mot clé ENDO, suivi d'un indicateur entier appelé IENDO qui désigne la loi choisie et des paramètres du modèle correspondant.

Par exemple, pour un béton dont les caractéristiques initiales sont $E = 10000$ MPa et $\nu = 0,2$, et pour le modèle de Mazars, avec $\varepsilon_D^0 = 10^{-4}$, $A_c = 1$; $B_c = 1000$; $A_t = 1$; $B_t = 10000$; on trouvera dans le jeu de données les lignes suivantes :

Beton					nom du groupe		
10000	1				valeurs de IMOD et INAT (déformation plane)		
ELAS	0	10000.e6	0.2		mot-clé ELAS et données élastiques		
ENDO	6	1.e-4	1.	1000.	1.	10000.	Mot-clé ENDO, indicateur entier IENDO de la loi et données correspondantes

3.7.3. Modèles d'endommagement isotrope

3.7.3.1. Modèle de Mazars (IENDO=6)

On peut définir une classe de modèles dans laquelle le critère d'endommagement porte sur une fonction du tenseur des déformations (ou des contraintes).

Mazars (1984) a proposé un modèle isotrope d'endommagement pour le béton établi à partir de résultats expérimentaux. L'évolution de la variable d'endommagement dépend d'une *déformation équivalente* $\tilde{\varepsilon}$ qui traduit l'état local d'extension du matériau : tant qu'elle reste inférieure à un certain seuil, le matériau ne s'endommage pas et ses modules ne varient pas. Si le seuil est atteint, la variable d'endommagement d évolue suivant une loi d'endommagement que le modèle doit préciser.

Dans le modèle de Mazars original, la déformation équivalente est donnée par :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$$

où ε_i est la déformation principale dans la direction i et où $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ est donné par :

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i \quad \text{si } \varepsilon_i \geq 0 ; \quad \langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 \quad \text{si } \varepsilon_i < 0$$

L'endommagement démarre lorsque $\tilde{\varepsilon}$ dépasse un certain seuil ε_{D0} . Le modèle de Mazars (1984) propose que ce seuil soit la déformation correspondante à la contrainte maximale lors d'un essai uniaxial de traction directe. Si on suppose que le comportement est linéaire jusqu'à la contrainte maximale en traction, on peut écrire :

$$r^0 = \frac{\sigma_t}{E_0}$$

où σ_t est la résistance en traction et E_0 le module d'élasticité sans endommagement. Le critère d'endommagement s'écrit alors :

$$F = \tau - r \leq 0$$

où r est le seuil actuel, égal au seuil initial ε_{D0} s'il n'a jamais été atteint, ou à la plus grande valeur atteinte par τ dans le cas contraire. La surface du domaine élastique, définie par $F=0$, est montrée dans la figure suivante à titre illustratif, σ_c représentant la résistance en compression.

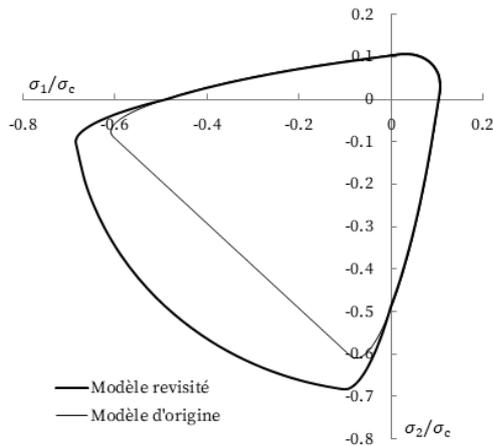


Figure – Surface limite d’endommagement du modèle de Mazars dans l’espace de contraintes principales avec $\sigma_3 = 0$

Il reste à préciser l’évolution de la variable d’endommagement. Étant donné que l’effet de l’endommagement n’est pas le même en traction et compression, Mazars (1984) considère que, pour un état de contraintes multiaxial, la variable d est une combinaison linéaire de deux variables d’endommagement associées respectivement aux contraintes de traction d_t et de compression d_c :

$$d = \alpha_t d_t + \alpha_c d_c$$

En l’absence de traction $\alpha_t = 0$; en l’absence de compression $\alpha_c = 0$, et dans tous les cas $\alpha_t + \alpha_c = 1$. Les lois d’évolution de deux variables d’endommagement sont :

$$d_c = 1 - \frac{r^0(1 - A_c)}{\tau_M} - \frac{A_c}{\exp[B_c - (r - r^0)]}$$

$$d_t = 1 - \frac{r^0(1 - A_t)}{\tau_M} - \frac{A_t}{\exp[B_t - (r - r^0)]}$$

avec r^0 la déformation seuil, déterminée expérimentalement et r la valeur actuelle du seuil. Les paramètres A_c et B_c (respectivement A_t et B_t) sont déterminés expérimentalement à partir des courbes contrainte – déformation d’un essai de compression (respectivement de traction).

Les facteurs α_i qui déterminent la contribution de traction ou compression sont déterminés en fonction de l’état de déformation:

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ti}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ti})}{\tilde{\varepsilon}^2}$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ci}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ti})}{\tilde{\varepsilon}^2}$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est la déformation équivalente, et où $H_i = 0$ si $\varepsilon_i < 0$ et $H_i = 1$ si $\varepsilon_i > 0$. Les parties ε_{ti} et ε_{ci} correspondent aux déformations principales occasionnées par les contraintes de traction et compression respectivement. On les calcule en décomposant le tenseur de contraintes principales effectives en une partie positive et une négative :

$$\varepsilon_{ti} = s_{ij}^0 \bar{\sigma}_i^+$$

$$\varepsilon_{ci} = s_{ij}^0 \bar{\sigma}_i^-$$

Dans ces expressions, si $\bar{\sigma}_i > 0$ alors $\bar{\sigma}_i^+ = \bar{\sigma}_i$, et $\bar{\sigma}_i^- = 0$ et dans le cas contraire $\bar{\sigma}_i^+ = 0$ $\bar{\sigma}_i^- = \bar{\sigma}_i$. La matrice de souplesse sans endommagement est calculée comme suit :

$$s_{ij}^0 = \frac{1}{E_0} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix}$$

La valeur correspondante de s_{ij}^0 est à prendre en compte dans le cas de contraintes ou de déformations planes. On notera que l'on a :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci}$$

Le type de courbe contrainte – déformation associé à ce modèle est illustré par la figure suivante.

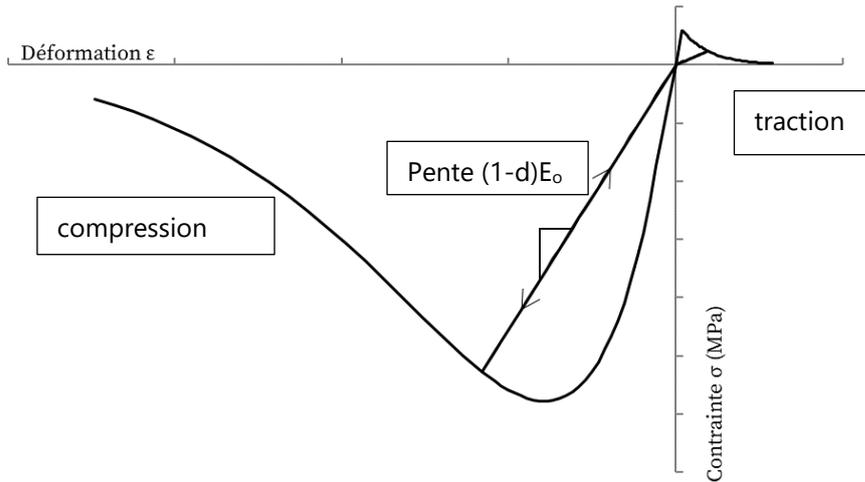


Figure –Comportement uniaxial pour le modèle de Mazars

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Mazars (IENDO=6):

- déformation définissant le seuil d'endommagement initial ε_D^0 [-]
- A_t, B_t : paramètres de la loi d'endommagement en traction [-]
- A_c, B_c : paramètres de la loi d'endommagement en compression [-]

3.7.3.2. Modèle de Mazars revisité avec régularisation (IENDO=9)

Dans le modèle de Mazars « revisité », la déformation équivalente appelée maintenant τ est celle proposée par Davenne et al (1989) :

$$\tau = \gamma \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$$

Elle introduit un coefficient γ , qui vise à obtenir de meilleurs résultats lorsque le matériau se trouve en compression biaxiale. Le coefficient γ est défini par l'expression suivante :

$$\gamma = - \frac{\sqrt{\langle \bar{\sigma}_1 \rangle_-^2 + \langle \bar{\sigma}_2 \rangle_-^2 + \langle \bar{\sigma}_3 \rangle_-^2}}{\langle \bar{\sigma}_1 \rangle_- + \langle \bar{\sigma}_2 \rangle_- + \langle \bar{\sigma}_3 \rangle_-}$$

où $\bar{\sigma}_i$ est la contrainte principale effective dans la direction i , et $\langle \bar{\sigma}_i \rangle_-$ sa partie négative : $\langle \bar{\sigma}_i \rangle_- = \bar{\sigma}_i$ si $\bar{\sigma}_i \leq 0$, $\langle \bar{\sigma}_i \rangle_- = 0$ sinon. La valeur de γ est bornée entre 0 et 1, et est calculée uniquement lorsqu'au moins une contrainte principale est négative, c'est-à-dire en compression.

D'autre part, nous avons vu que le traitement numérique de l'endommagement nécessite une technique de régularisation afin de rendre la solution moins dépendante de la taille des éléments du maillage. La technique choisie ici consiste à faire dépendre l'évolution de l'endommagement de la taille de l'élément fini. On modifie l'équation utilisée pour calculer la variable d_t suivant la proposition de La Borderie (2003) :

$$d_t = 1 - \frac{r^0}{r} \exp[-B_t(r - r^0)]$$

Le paramètre B_t dépend de la longueur caractéristique l_c , de l'énergie de fracturation en mode I, notée G_f , et de la contrainte de rupture du matériau en traction σ_t :

$$B_t = \frac{l_c \sigma_t}{G_f}$$

On prend $l_c = \sqrt{S}$, où S est l'aire de l'élément auquel appartient le point d'intégration. L'énergie de fracturation G_f est considérée comme une propriété du matériau (dont la détermination expérimentale est par ailleurs délicate).

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Mazars revisité avec régularisation (IENDO=9):

- déformation définissant le seuil d'endommagement initial ε_D^0 [-]
- contrainte limite en traction σ_t (Pa)
- énergie de fracturation en mode I, G_f , (Pa/m)
- A_c, B_c : paramètres de la loi d'endommagement en compression [-]

3.7.3.3. Modèle d'Oliver (IENDO=7)

Pour caractériser la dégradation progressive des propriétés du matériau, Simo et Ju (1987) proposent d'utiliser une grandeur liée à l'énergie de déformation, notée τ , qui traduit l'état de déformation en trois dimensions du point étudié :

$$\tau = \sqrt{\varepsilon_{ij} : C_{ijkl}^0 : \varepsilon_{kl}} = \sqrt{2\psi^0}$$

L'énergie τ peut être également exprimée en termes des contraintes principales effectives $\bar{\sigma}_i$:

$$\tau = \sqrt{\bar{\sigma}_i s_{ij}^0 \bar{\sigma}_i}$$

On trouve pour le cas tridimensionnel :

$$\tau = \frac{1}{E_0} [\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2 - 2\nu(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3)]$$

Nous avons utilisé le troisième modèle proposé dans l'article d'Oliver et al (1990), qui modifie l'expression de τ afin de mieux prendre en compte le comportement en compression, en introduisant un coefficient γ , fonction de l'état de contraintes :

$$\tau = \gamma \sqrt{\bar{\sigma}_i s_{ij}^0 \bar{\sigma}_i}$$

avec

$$\gamma = \left(\theta + \frac{1 - \theta}{n} \right) ; \theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|} ; n = \frac{\sigma_c}{\sigma_t}$$

où $\bar{\sigma}_i$ est la contrainte principale effective dans la direction i , $\langle \cdot \rangle$ désigne la partie positive : $\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \bar{\sigma}_i$ si $\bar{\sigma}_i \geq 0$, $\bar{\sigma}_i = 0$ sinon. On trouve $\gamma = 1$ en traction triaxiale et $\gamma = 1/n$ en compression triaxiale ; σ_c et σ_t , sont la résistance à la compression et à la traction, respectivement.

Le critère d'endommagement s'écrit

$$F = \tau - r \leq 0$$

où r désigne le seuil actuel d'endommagement, dont la valeur initiale est notée r° , donné par

$$r^\circ = \sqrt{\varepsilon_t E_0 \varepsilon_t}$$

où ε_t est la déformation correspondant à la limite en traction $\sigma_t = E_0 \varepsilon_t$, E_0 désignant le module d'élasticité sans endommagement. La surface du domaine élastique $F=0$ est montrée dans la figure suivante à titre illustratif, σ_c représentant la résistance en compression.

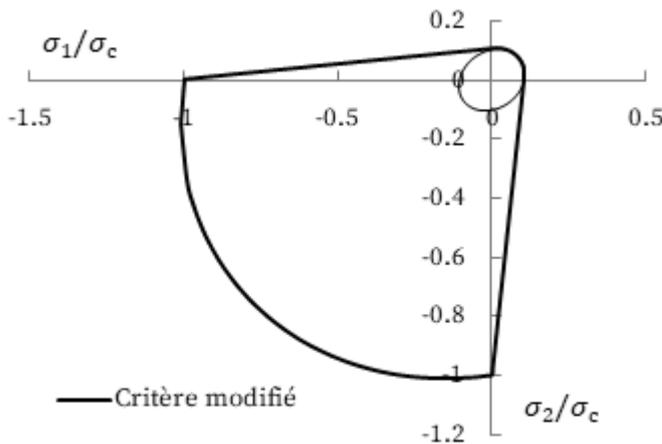


Figure – Surface limite d'endommagement du modèle d'Oliver et al (1990) dans l'espace de contraintes principales avec $\sigma_3 = 0$

Pour l'évolution de la variable d'endommagement, Oliver et al (1990) proposent la forme suivante:

$$d = 1 - \frac{r_0}{r} \exp\left\{A\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right\}$$

Le paramètre A prend en compte la technique de régularisation nécessaire pour le traitement numérique du modèle. L'expression proposée par Oliver et al (1990) est :

$$A = \left(\frac{G_f E_0}{l_c \sigma_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0$$

où G_f est l'énergie de fissuration en mode I, supposée une propriété du matériau ; l_c est la longueur caractéristique prise égale à $l_c = \sqrt{S}$, avec S l'aire de élément fini à laquelle appartient le point d'intégration.

Le comportement uniaxial décrit par ce modèle est illustré par la figure suivante.

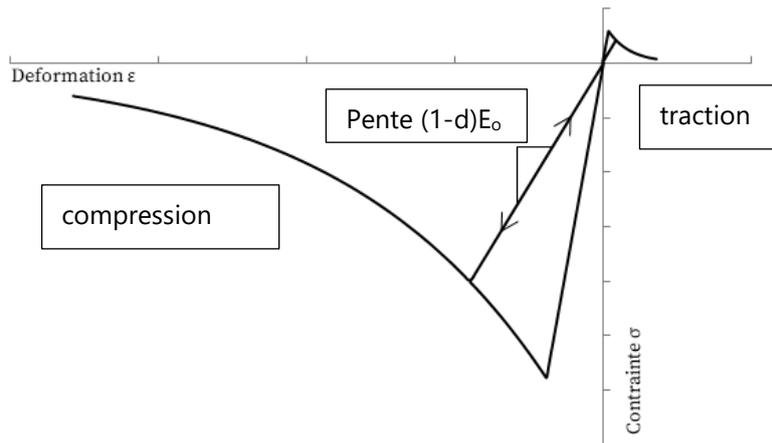


Figure – Comportement uniaxial pour le modèle d'Oliver et al (1990)

Le modèle de Mazars présenté dans le paragraphe précédent et le modèle proposé par Oliver et al (1990), reproduisent correctement le comportement non linéaire du béton en traction. En revanche, c'est le modèle de Mazars qui reproduit avec plus de précision le comportement en compression du béton.

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Oliver (IENDO=7):

- contrainte limite en traction σ_t (Pa)
- énergie de fracturation en mode I, G_f (Pa/m)
- contrainte limite en compression σ_c (Pa)

3.7.3.4. Modèle de Faria (IENDO=10)

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Faria (IENDO=10):

- contrainte limite en traction σ_t (Pa)
- contrainte limite en compression σ_c (Pa)
- A_c, B_c : paramètres de la loi d'endommagement en compression [-]
- énergie de fracturation en mode I, G_f (Pa/m)

3.7.4. Modèles d'endommagement anisotropes pour la maçonnerie

La thèse d'Omar Moreno Regan (CIFRE RATP/IFSTTAR) avait pour objectif de développer des modèles de comportement mécanique pour représenter les voutes en maçonnerie du métro parisien. Les calculs élastoplastiques montrent des insuffisances : ils donnent une phase initiale de déformation relativement raide, suivi d'une rupture brutale, alors que l'expérience indique que le comportement réel de la voûte est plus souple. Ce manque de représentativité des modèles numériques pose problème lorsqu'on veut fixer des seuils de déplacement à ne pas dépasser lors de travaux à proximité d'un tunnel ancien.

L'approche prend en compte deux aspects du comportement de la maçonnerie :

- l'appareillage de maçonnerie conduit à représenter la voute par un milieu homogénéisé anisotrope. La structure hétérogène constituée par les blocs et les joints de mortier est remplacée par un matériau homogène équivalent, suivant une technique d'homogénéisation particulière tirée de la littérature : on élabore donc dans une première étape un modèle élastique orthotrope, qui prend en compte l'orientation et l'épaisseur des joints, l'appareillage des blocs, etc. On a introduit une élasticité linéaire orthotrope (IELAS=14, voir 3.3.3.7), puis la possibilité de calculer les modules d'élasticité anisotrope à partir des caractéristiques de la maçonnerie (IELAS=15, voir 0), et enfin une prise en compte de l'orientation locale des joints de maçonnerie dans une voute elliptique (IELAS=16/17, voir 3.3.3.9/3.3.3.10).
- d'autre part, la littérature disponible sur la maçonnerie montre qu'elle présente un comportement endommageable, c'est-à-dire une perte de raideur lorsque la déformation qu'elle subit augmente. On a mis en place un algorithme général de traitement numérique de ce type de modèles, et introduit un ensemble de modèles d'endommagement isotrope « classiques » utilisables pour d'autres matériaux que la maçonnerie (par exemple le béton). La dernière étape a consisté à combiner l'anisotropie et l'endommagement pour définir un modèle spécifiquement dédié à la maçonnerie. On introduit un endommagement isotrope pour chaque constituant de la maçonnerie, et à tenir compte de l'état d'endommagement des constituants dans la procédure d'homogénéisation des propriétés élastiques.

La démarche peut être mise en œuvre pour différents modèles d'endommagement locaux dans les constituants, ce qui explique qu'il y a plusieurs lois d'endommagement proposées dans CESAR pour la maçonnerie. L'approche proposée par Zucchini consiste à utiliser un critère de type Rankine. O. Moreno Regan a proposé deux variantes, dans lesquelles l'endommagement local est décrit par le modèle de Mazars ou par celui d'Oliver.

Ces trois modèles sont donc supposés être associés aux modèles élastiques décrivant les composantes de la maçonnerie, IELAS=15 ou IELAS=17 dans le cas d'une voute elliptique.

3.7.4.1. Modèle de Zucchini (IENDO=22)

Dans l'approche proposée par Zucchini (2004), l'endommagement est décrit par un modèle de type Rankine. Dans ce modèle, sous charges normales, le bloc et le joint vertical sont supposés s'endommager en mode I. La surface limite d'endommagement est donnée par un critère de Rankine :

$$F = \tau - r \leq \eta_1$$

où $\eta_1 = 10^{-2}$, $\tau = \bar{\sigma}_p$ est la contrainte principale effective maximale en traction du bloc ou du joint vertical et r est le seuil actuel, égal au seuil initial σ_t s'il n'a jamais été atteint ou à la plus grande valeur atteinte par τ dans le cas contraire.

La loi d'évolution de l'endommagement est inspirée du modèle d' Oliver et al (1990) :

$$d = 1 - \frac{\sigma_t}{r} \exp\left\{A\left(1 - \frac{r}{\sigma_t}\right)\right\}$$

Le paramètre A prend en compte la technique de régularisation nécessaire pour le traitement numérique du modèle. L'expression proposée par Oliver et al (1990) est :

$$A = \left(\frac{G_f E_0}{l_c \sigma_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0$$

où G_f est l'énergie de fissuration en mode I, supposée une propriété du matériau ; l_c est la longueur caractéristique prise égale à $l_c = \sqrt{S}$, où S représente l'aire de élément fini à laquelle appartient le point d'intégration.

Le joint horizontal (dans la direction b) est supposé s'endommager en mode II. Le critère d'endommagement est le même, mais on remplace $\bar{\sigma}_p$ par $\bar{\tau}$, la contrainte effective de cisaillement, et σ_t par σ_s , la résistance à la traction et au cisaillement, respectivement. La loi d'évolution devient

$$d = 1 - \frac{\sigma_s}{r} \exp\{A_s(1 - \frac{r}{\sigma_s})\}$$

Le paramètre A_s est calculé par la formule

$$A = \left(\frac{G_{fs} G_m^\circ}{l_c \sigma_s^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0$$

où l_c est la longueur caractéristique, G_{fs} est l'énergie de fissuration en mode II et G_m° le module de cisaillement non endommagé.

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Zucchini (IENDO=22):

- Résistance à la traction des blocs σ_{tB} (Pa)
- Energie de fracturation en mode I des blocs G_{fB} (Pa/m)
- Résistance à la traction du mortier σ_{tm} (Pa)
- Energie de fracturation en mode I du mortier G_{fm} (Pa/m)
- Résistance au cisaillement des blocs σ_{sB} (Pa)
- Energie de fracturation en mode II des blocs G_{fB} (Pa/m)
- Résistance à la traction du mortier σ_{sm} (Pa)
- Energie de fracturation en mode II du mortier G_{fsm} (Pa/m)
- Résistance à la compression des blocs σ_{cB} (Pa)
- Résistance à la compression du mortier σ_{cm} (Pa)

3.7.4.2. Modèle de Zucchini+Mazars revisité (IENDO=24)

Il s'agit d'une variante dans laquelle l'endommagement des constituants est décrit par le modèle de Mazars revisité avec régularisation. On donne les paramètres correspondants pour les deux constituants (blocs et mortier).

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Zucchini (IENDO=24):

- Résistance à la traction des blocs σ_{tB} (Pa)
- Energie de fracturation en mode I des blocs G_{fB} (Pa/m)
- Résistance à la traction du mortier σ_{tm} (Pa)
- Energie de fracturation en mode I du mortier G_{fm} (Pa/m)
- valeur du seuil d'endommagement initial des blocs ε_{DB} (-)

- valeur du seuil d'endommagement initial du mortier ε_{Dm} (-)
- A_{cB} , B_{cB} : paramètres de la loi d'endommagement en compression des blocs [-]
- A_{cm} , B_{cm} : paramètres de la loi d'endommagement en compression du mortier [-]

3.7.4.3. Modèle de Zucchini+Oliver (IENDO=26)

Dans cette variante, l'endommagement des constituants est décrit par le modèle d'Oliver. On donne les paramètres correspondants pour les deux constituants (blocs et mortier).

Paramètres pour le modèle d'endommagement de Zucchini (IENDO=26):

- Résistance à la traction des blocs σ_{tB} (Pa)
- Energie de fracturation en mode I des blocs G_{fB} (Pa/m)
- Résistance à la traction du mortier σ_{tm} (Pa)
- Energie de fracturation en mode I du mortier G_{fm} (Pa/m)
- Résistance à la compression des blocs σ_{cB} (Pa)
- Résistance à la compression du mortier σ_{cm} (Pa)

4. Modélisation multiphasique des milieux renforcés

4.1. Principe de la modélisation proposée

Les éléments des familles 431/432 reposent sur la modélisation multiphasique proposée par de Buhan et Sudret (2000).

Bien que ces modèles soient fonctionnels dans la version standard du solveur, la préparation des données spécifiques n'est pas encore possible au moyen de l'interface graphique CLEO.

D'autre part, la modélisation multiphasique n'est pas fonctionnelle dans d'autres contextes que celui des calculs de mécanique en statique (pas de calculs dynamiques, ni de calculs couplés hydromécaniques par exemple).

Particularité : une seule phase de renforcement.

La programmation devrait être revue pour que les modèles soient mis à la disposition des utilisateurs (numérotation des degrés de liberté).

L'approche combine une description du comportement mécanique du matériau avant renforcement, une description de la géométrie du système de renforcement, une description de leur comportement, et enfin de l'interaction entre les inclusions et le matériau qui les entoure. On notera que l'ordre dans lequel les données sont fournies n'est pas le même que pour les modèles à composantes avec le mot-clé RNF.

4.2. Modèles de comportement pour la phase matrice

L'ensemble des modèles utilisables pour les éléments de massif standards (modèles classiques ou à composantes) peuvent être mis en œuvre pour la matrice des éléments « multiphasiques ».

4.3. Dispositions géométriques pour la phase renforcement (indicateur IGEOM)

Ce sont les mêmes que pour IMOD=43 ou pour la modélisation via le mot clé RNF dans le contexte des modèles à composantes. On se reportera donc aux paragraphes 0 et 3.3.5.2.

4.4. Modèles de comportement pour la phase renforcement (indicateur ICOMP)

Ce sont également les mêmes que pour IMOD=43 ou pour la modélisation via le mot clé RNF dans le contexte des modèles à composantes. On se reportera donc aux paragraphes 0 et 3.3.5.1.

4.5. Modèles d'interaction entre les phases (indicateur ICINT)

L'originalité de la modélisation multiphasique par rapport à celles disponibles avec le modèle classique IMOD=43 ou le mot-clé RNF des modèles à composantes réside dans le fait que l'on peut décrire le comportement mécanique de l'interaction entre les phases.

4.5.1. Interaction linéaire (ICINT=1)

I est une densité volumique de force (N/m^3) ; ξ le déplacement relatif entre la phase matrice et la phase renforcement dans la direction des inclusions.

Formulation : $I = C_{int}\xi$

Le coefficient d'interaction volumique est ici en N/m^4 (ou en Pa/m^2)

4.5.2. Interaction linéaire parfaitement plastique (ICINT=4)

Formulation : $I = C_{int}(\xi - \xi^p)$

coefficient d'interaction volumique en N/m^4 (ou en Pa/m^2)

Force d'interaction maximale : I_{max} (en N/m^3)

4.5.3. Interaction bilinéaire parfaitement plastique (ICINT=14)

-

4.5.4. Interaction parabolique parfaitement plastique (ICINT=15)

-

5. Éléments de massif en dynamique

5.1. Calculs linéaires (module DYNI)

Le module de calcul DYNI ne permet d'utiliser que des modèles linéaires.

5.1.1. Modèles classiques (IMOD=1 et 2)

Les modèles IMOD=1 et IMOD=2 disponibles en statique fonctionnent également en dynamique avec DYNI (cf. 3.2.1 et 3.2.2).

5.1.2. Prise en compte d'un amortissement par groupe (IMOD=66)

Le module DYNI permet de prendre en compte un amortissement de Rayleigh : la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire de la matrice de rigidité et de la matrice de masse. Par défaut, les coefficients de cette combinaison linéaire sont les mêmes dans tous les groupes d'éléments du maillage, et donnés dans les options du module.

Dans certaines applications, il est nécessaire de distinguer l'amortissement dans différentes couches de sol : on peut donner les coefficients définissant la matrice d'amortissement pour chaque groupe. On choisit dans ce cas de donner à l'indicateur IMOD la valeur 66.

5.1.3. Modèles élastiques tirés des modèles à composantes

En principe, on peut utiliser les modèles de type IMOD=10000 linéaires isotropes, anisotropes transverses ou orthotropes, éventuellement hétérogènes, c'est-à-dire les modèles décrits dans la partie consacrée aux éléments de massif en statique et associés à IELAS=0, 1, 8, 2, 9, 11, 14, 15, 16, 17.

En revanche, le calcul avec des modèles non linéaires n'est pas fonctionnel dans DYNI.

La combinaison DYNI + modèles IMOD=10000 a été testée dans le cadre de la thèse de JB Payeur (2015), mais la validation complète reste à faire.

5.2. Calculs non linéaires (module MCCI)

MCCI

6. Éléments de massif en couplage hydromécanique ou thermo-hydro-mécanique

6.1. Couplage hydromécanique

En principe, l'ensemble des modèles de comportement mécanique utilisables pour les éléments de massif en statique sont également disponibles pour les calculs avec le module CSNL : les modèles classiques et les modèles « à composantes ».

Dans le cas des modèles classiques, on donne dans le jeu de données les caractéristiques mécaniques puis les caractéristiques de perméabilité.

Dans le cas des modèles « à composantes », on est amené à introduire, au même niveau que les mots-clés RHO, ELAS, CRT, POT ou RENF, un mot-clé spécifique 'HYDR' suivi des caractéristiques de perméabilité (voir le manuel de référence du solveur).

6.2. Couplage thermo-hydro-mécanique

Par contraste avec le module CSNL, le module MPNL ne permet pas d'utiliser tous les modèles de comportement mécanique utilisables en mécanique statique sans couplage. La liste des modèles utilisables correspond aux modèles associés en statique à IMOD=1, 2, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 ou 20.

7. Éléments d'interfaces

7.1. Éléments de contact et éléments de joint

CESAR propose deux familles d'éléments pour modéliser les interfaces dans un problème mécanique : les éléments de contact (ou de frottement/décollement) de la famille 06 et les éléments de joint (famille 16). Les premiers supposent d'utiliser le module TCNL pour une prise en compte d'un contact frottant, alors que les joints fonctionnent avec MCNL.

7.2. Éléments de contact

7.2.1. Rappel sur les éléments de contact

Pour traiter les problèmes de contact avec frottement entre solides déformables, le solveur CESAR a d'abord proposé d'utiliser un module dédié, appelé TCNL, qui permet l'utilisation d'éléments spécifiquement destinés à représenter les interfaces entre solides. Ces éléments sont les éléments de la famille 06 de CESAR, et sont appelés « éléments de frottement-décollement » ou plus couramment « éléments de contact ». A partir de la version 2020 de CESAR-LCPC, une autre possibilité pour traiter le contact est offerte par une nouvelle famille d'éléments d'interface, qu'on appelle « éléments de joints » pour la distinguer de la précédente. L'intérêt de la famille d'éléments de joints réside dans le fait qu'elle peut fonctionner avec le module MCNL. Elle est décrite dans la section suivante (0-

Eléments de joint).

Le traitement du comportement non linéaire d'un matériau dans le module TCNL est identique à celui du module MCNL avec l'algorithme de résolution basé sur la méthode des contraintes initiales. C'est le traitement du contact qui fait l'objet de cette section.

Soient deux solides Ω_1 et Ω_2 potentiellement en contact dans une zone S_C (voir figure suivante). Initialement, la surface de contact est $S_0 \subseteq S_C$. Le principe de l'algorithme de TCNL consiste à procéder à une application incrémentale du chargement de façon à suivre l'évolution de la zone de contact effective $S (\subseteq S_C)$. A chaque incrément de chargement, on vérifie à l'aide d'un processus itératif à la fois les équations d'équilibre et l'ensemble des critères de contact.

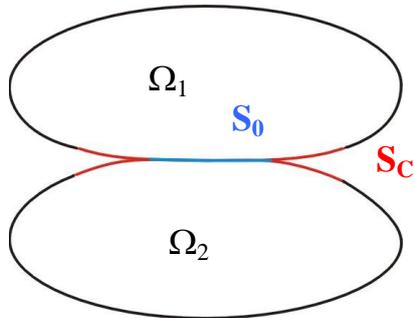


Figure 11 – Solides en contact

On parle de contact rigide entre deux solides lorsqu'ils peuvent entrer en contact et se déformer l'un l'autre, mais qu'ils ne peuvent s'interpénétrer. La distance d d'un point du domaine Ω_1 au domaine Ω_2 après application du chargement est donc positive ou nulle (voir figure suivante). La condition $d \geq 0$ est dite de non-pénétration.

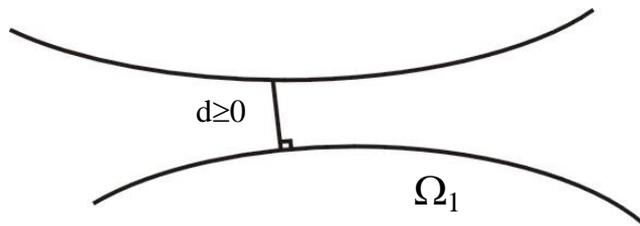


Figure 12 – Non pénétration

Critère de frottement

Lorsque les solides Ω_1 et Ω_2 sont en contact, le déplacement tangentiel relatif entre les deux corps est soit nul (contact adhérent), soit non nul (contact glissant). La nature des forces s'exerçant à l'interface entre les deux milieux diffère suivant qu'il y a adhérence ou glissement. On note σ^1 et σ^2 les tenseurs des contraintes normales au point de contact entre les deux milieux. Les explications qui suivent se réfèrent à une configuration bidimensionnelle, mais le cas tridimensionnel se traite de façon similaire. Dans le repère local (n_1, t_1) défini par la figure suivante relativement à Ω_1 , on écrit :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_n^1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

On définit de la même façon σ^2 dans (n_2, t_2) , avec $n_2 = -n_1$ et $t_2 = -t_1$. On a $\sigma^1 + \sigma^2 = 0$ en vertu du principe de l'action et de la réaction, aussi se réfère-t-on dans la suite au solide Ω_1 , en omettant volontairement les indices ou exposants faisant référence à ce milieu.

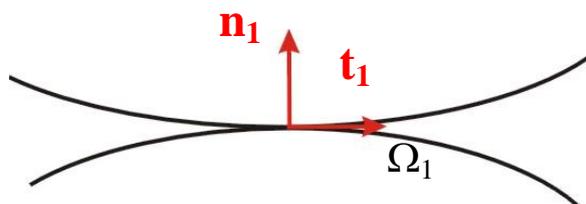


Figure 13 - Frottement

La loi de Coulomb avec cohésion et résistance en traction est utilisée pour modéliser les forces de frottement. La nature du contact dépend de la valeur de la fonction de charge f définie par :

$$f = |\tau| - c + \sigma_n \tan \phi \quad (2)$$

où c désigne la cohésion et ϕ l'angle de frottement. Ces grandeurs sont caractéristiques de la nature du contact entre les deux milieux considérés. Comme le montre la figure suivante, la loi de Coulomb se traduit par un ensemble de trois conditions. Le contact est collant si $f < 0$, glissant si $f = 0$, et le cas de figure $f > 0$ est interdit. Lorsqu'il y a glissement, le déplacement relatif ε_C entre les deux solides au point de contact est donné par :

$$\varepsilon_C = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3)$$

où λ est un multiplicateur plastique à déterminer, $g = |\tau| - c + \sigma_n \tan \psi$ est le potentiel d'écoulement, avec ψ angle de dilatance. Lorsque $\psi \neq \phi$, le critère de frottement de Coulomb est dit non-associé. La résistance en traction est exprimée par la condition $\sigma_n \leq R_t$. Nous discuterons plus loin du choix de R_t .

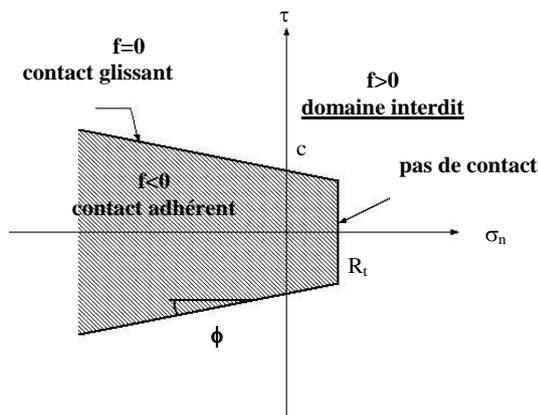


Figure 14 - Loi de Coulomb avec cohésion et résistance en traction

La modélisation du contact dans CESAR est basée sur une méthode de régularisation par pénalité, permettant de respecter les lois de contact de façon approchée. La régularisation par pénalité peut s'interpréter de la façon suivante :

- On tolère que dans la zone de contact, l'un des deux solides pénètre légèrement dans le second. Ceci revient à permettre que le paramètre d soit négatif, tout en restant petit en valeur absolue par rapport aux dimensions des solides.
- On tolère que le déplacement tangentiel relatif entre les deux solides soient non nuls, même en cas de contact collant ($f < 0$).

Lorsqu'une telle technique est employée, le déplacement relatif entre les deux solides se décompose ainsi en une partie plastique (irréversible) correspondant au glissement, et une partie élastique (réversible) obtenue par pénalité.

7.2.2. Modèles d'interface pour les éléments de contact

Les éléments de contact disponibles dans CESAR sont les suivants :

- en 2D ou plan axisymétrique : quadrilatères à 6 nœuds.
- en 3D : hexaèdres à 16 nœuds ou pentaèdres à 12 nœuds.

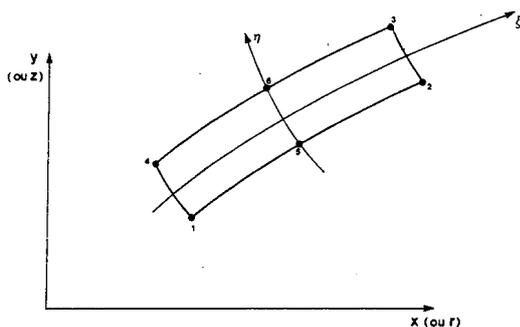


Figure 15 - quadrilatères à 6 nœuds

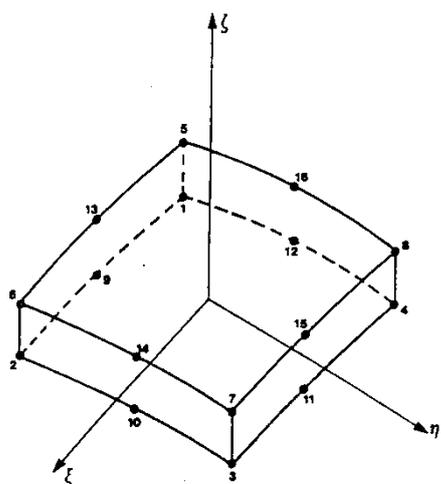


Figure 16 - Hexaèdre à 16 noeuds

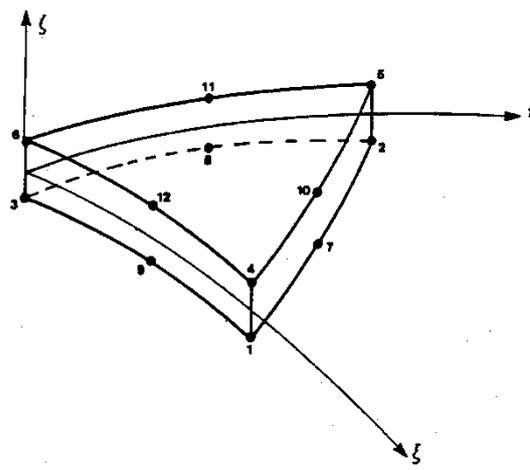


Figure 17 - Pentaèdre à 12 nœuds

Tous les éléments de cette famille ont donc deux "faces", et le code calcule les contraintes à l'interface entre les solides en fonction du déplacement relatif entre les nœuds en vis-à-vis sur les deux faces. La prise en compte de ces éléments dans le calcul par éléments finis suppose de leur associer une matrice de rigidité, calculée à partir d'un coefficient de rigidité fictif donné par l'utilisateur, que l'on recommande de choisir égal au plus faible des modules d'Young des deux solides en contact.

7.2.2.1. Adhérence parfaite (IMOD=1)

C'est le cas où les éléments de contact assurent en fait la continuité des déplacements entre les deux faces de l'élément. Il n'y a pas de limite de résistance d'interface entre les deux solides.

7.2.2.2. Frottement de Coulomb (IMOD=2)

Le modèle de Mohr Coulomb correspond à la condition de résistance :

$$|\tau| < c - \sigma_n \tan \phi$$

où τ est la contrainte de cisaillement et σ_n la contrainte normale au point considéré. c et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement de l'interface.

7.2.2.3. Glissement parfait (IMOD=3)

C'est le cas où les éléments de contact n'assurent que la continuité du déplacement normal entre les deux faces de l'élément. La contrainte de cisaillement à l'interface est nulle.

7.2.2.4. Frottement de Coulomb (IMOD=4)

Il s'agit d'un algorithme alternatif pour traiter le même modèle théorique que dans le cas IMOD=2. Les deux programmations sont en principe équivalentes en 2D. En 3D, le traitement avec IMOD=4 constitue une solution à tester dans certaines situations où l'algorithme de base converge mal.

7.2.2.5. Utilisation d'éléments de contact dans les calculs en diffusion

On peut être amené à effectuer un calcul mécanique et un calcul d'écoulement ou un calcul thermique sur le même maillage. A partir de la version 2020 de CESAR, il est possible de convertir les éléments d'interface mécanique en éléments parfaitement conducteurs (ou parfaitement perméables) ou en éléments parfaitement isolants (ou parfaitement étanches) pour un calcul de thermique (ou d'écoulement). La technique consiste à remplacer les éléments de la famille 06 par des éléments ad hoc (famille 28). Cette conversion est gérée automatiquement par le préprocesseur CLEO (mais peut être réalisée en éditant à la main un jeu de données de CESAR).

7.3. Eléments de joint

7.3.1. Rappel sur les éléments de joint

Les éléments de joint visent à résoudre le même type de problèmes que les éléments de contact présentés dans la section précédente, mais dans le contexte du module MCNL. Le traitement du contact dans le cas des éléments de joint est nettement plus simple que pour les éléments de contact : ils sont traités comme des éléments ordinaires. En pratique, ce sont des éléments dérivés des joints proposés par Goodman (1968).

Comme dans les éléments de contact, le déplacement relatif entre les deux solides se décompose ainsi en une partie plastique (irréversible) correspondant au glissement, et une partie élastique (réversible) destinée à rester petite tant que le critère de glissement n'est pas atteint.

7.3.2. Modèles d'interface pour les joints

Les éléments de joint disponibles dans CESAR sont les suivants :

- en 2D ou plan axisymétrique : quadrilatères à 4 ou 6 nœuds.
- en 3D : hexaèdres à 8 ou 16 nœuds ou pentaèdres à 6 ou 12 nœuds.

Tous les éléments de cette famille ont donc deux "faces", et le code calcule les contraintes à l'interface entre les solides en fonction du déplacement relatif entre les nœuds en vis-à-vis sur les deux faces. La prise en compte de ces éléments dans le calcul par éléments finis suppose de leur associer une matrice de rigidité, calculée à partir d'un coefficient de rigidité fictif donné par l'utilisateur. Pour les joints, on recommande de le prendre égal à 100 fois le plus faible des modules d'Young des deux solides en contact.

7.3.2.1. Adhérence parfaite (IMOD=1)

C'est le cas où les joints assurent en fait la continuité des déplacements entre les deux faces de l'élément. Il n'y a pas de limite de résistance d'interface entre les deux solides.

7.3.2.2. Frottement de Coulomb (IMOD=2)

Le modèle introduit une limite sur la contrainte de cisaillement τ dans l'élément de joint, qui dépend de la contrainte normale σ_n :

$$|\tau| < c - \sigma_n \tan \phi$$

c et ϕ étant la cohésion et l'angle de frottement caractéristiques de la nature du contact.

7.3.2.3. Glissement parfait (IMOD=3)

Avec ce modèle, les joints n'assurent que la continuité du déplacement normal entre les deux faces de l'élément.

7.3.3. Utilisation d'éléments de joint dans les calculs en diffusion

On peut être amené à effectuer un calcul mécanique et un calcul d'écoulement ou un calcul thermique sur le même maillage. A partir de la version 2020 de CESAR, il est possible de convertir les éléments d'interface mécanique en éléments parfaitement conducteurs (ou parfaitement perméables) ou en éléments parfaitement isolants (ou parfaitement étanches) pour un calcul de thermique (ou d'écoulement). La technique consiste à remplacer les éléments de joint de la famille 16 par des éléments ad hoc (famille 28). Cette conversion est gérée automatiquement par le préprocesseur CLEO (mais peut être réalisée en éditant à la main un jeu de données de CESAR).

8. Éléments de barre

8.1. Introduction

Les éléments de barre sont des éléments unidimensionnels, dans lesquels le seul effort intérieur pris en compte est l'effort normal N . Il est relié à la déformation longitudinale, c'est-à-dire l'allongement ou le raccourcissement δ de la barre rapporté à sa longueur initiale, noté ε . Dans le cas élastique linéaire, la loi de comportement prend la forme :

$$N = E S \delta / L = E S \varepsilon$$

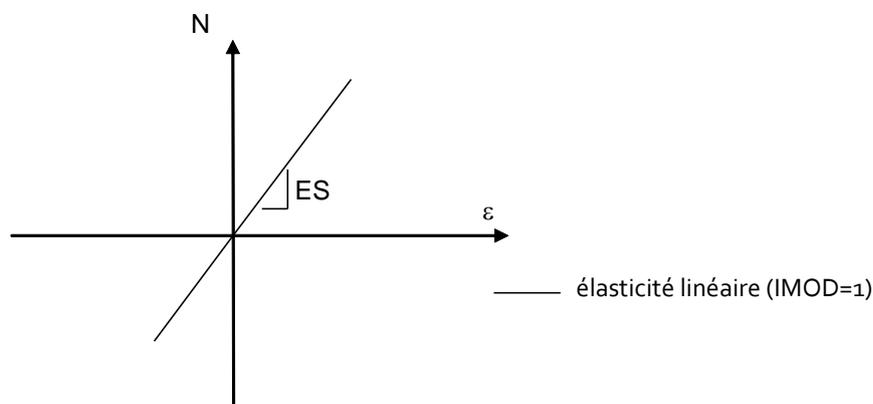
où E désigne le module d'Young du matériau constituant la barre et S l'aire de la section de la barre (supposée constante sur un élément).

Dans le cas du comportement élastique- parfaitement plastique, il y a une relation linéaire entre N et ε tant que l'effort normal N est inférieur à un seuil, noté F_{\max} , le coefficient de proportionnalité étant à nouveau égal au produit du module d'Young de la barre E par l'aire S de sa section. Lorsque l'effort normal atteint la valeur limite F_{\max} , la barre peut continuer à s'allonger, mais l'effort n'augmente plus : la déformation de la barre est désormais la somme de deux contributions, l'une réversible, notée ε^e , égale à $N_0 L / ES$, l'autre irréversible, notée ε^p . La valeur de F_{\max} est le produit de la contrainte limite en traction et de l'aire de la section de la barre. On peut imaginer pour certaines situations particulières, de prendre en compte une limite élastique différente en compression.

Au-delà de ces deux modèles de base, CESAR propose plusieurs autres modèles de comportement non linéaire pour les barres. Ces modèles sont disponibles aussi bien en 2D qu'en 3D, pour les éléments de barre à 2 ou 3 nœuds.

8.2. Modèles de comportement

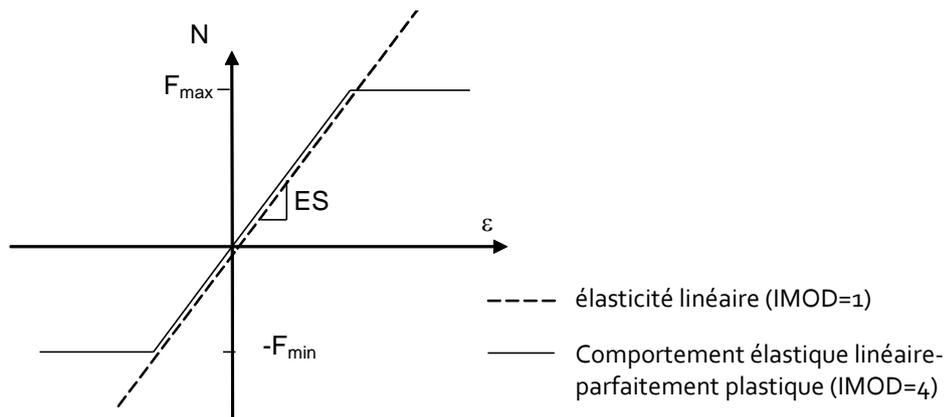
8.2.1. Comportement élastique linéaire (IMOD=1)



Paramètres du modèle élastique linéaire pour les barres (IMOD=1) :

- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- aire de la section (S) [m²].

8.2.2. Comportement élastique-parfaitement plastique (IMOD=4)

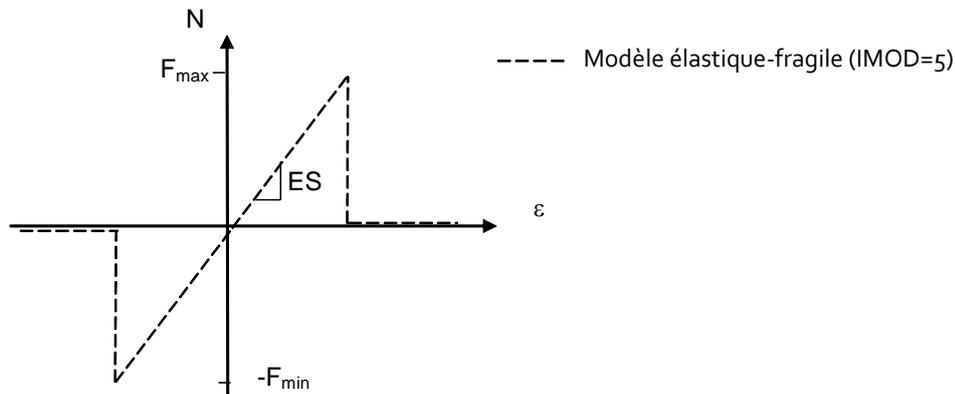


Paramètres du modèle élastique linéaire – parfaitement plastique pour les barres (IMOD=4) :

- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- Valeur limite de l'effort normal en traction (FMAX) [N] ;
- Valeur limite de l'effort normal en compression (FMIN) [N] ;
- aire de la section (S) [m²].

8.2.3. Comportement élastique linéaire – fragile (IMOD=5)

On peut prendre en compte un comportement fragile des barres : lorsque la limite élastique est atteinte, l'effort dans la barre revient à zéro (figure). Les forces reprises par la barre avant la rupture sont reportées sur les autres éléments du maillage ayant des nœuds communs avec la barre rompue.

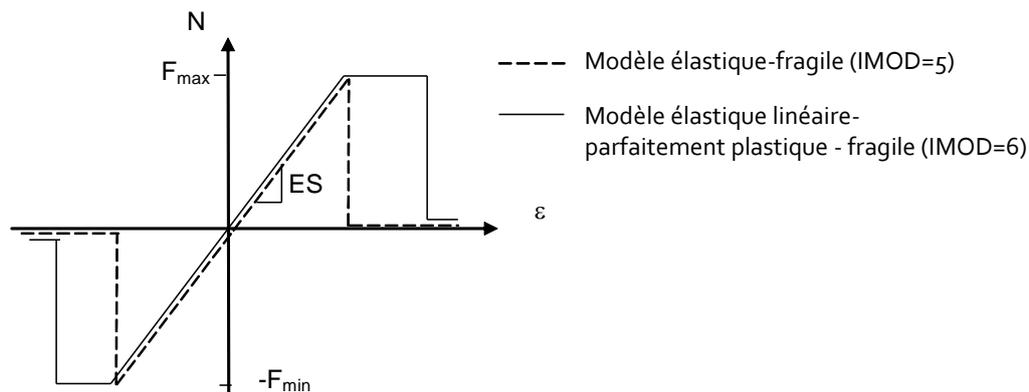


Paramètres du modèle élastique linéaire – fragile pour les barres (IMOD=5) :

- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- Valeur limite de l'effort normal en traction (FMAX) [N] ;
- Valeur limite de l'effort normal en compression (FMIN) [N] ;
- aire de la section (S) [m²].

8.2.4. Comportement élastique linéaire – parfaitement plastique – fragile (IMOD=6)

On peut également envisager un comportement élastique – parfaitement plastique jusqu'à une certaine déformation plastique limite au-delà de laquelle la barre casse (voir figure ci-dessous).



Paramètres du modèle élastique linéaire - fragile pour les barres (IMOD=6) :

- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- Valeur limite de l'effort normal en traction (F_{MAX}) [N] ;
- Valeur limite de l'effort normal en compression (F_{MIN}) [N] ;
- Déformation plastique maximale a la rupture (traction) (EPSMAX) [-] ;
- Déformation plastique maximale a la rupture (compression) (EPSMIN) [-] ;
- aire de la section (S) [m²].

8.2.5. Comportement élastique linéaire – parfaitement plastique avec perte de raideur (IMOD=7)

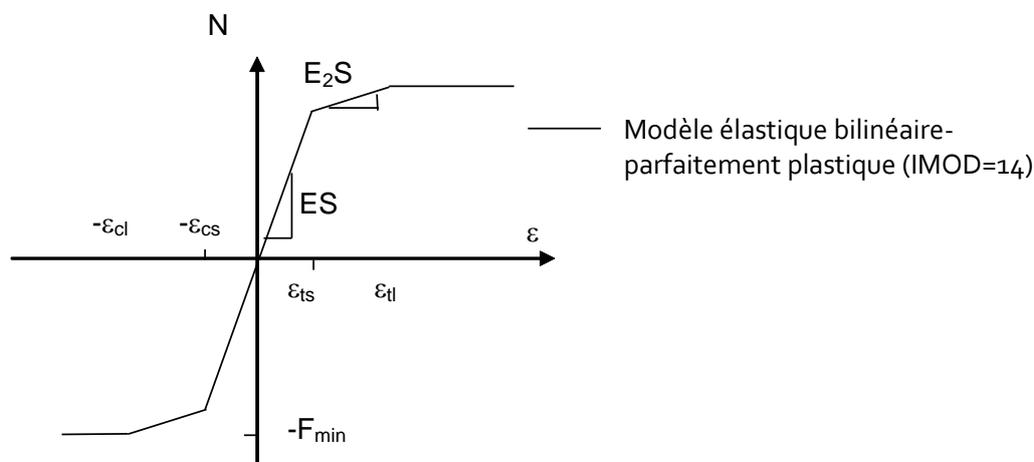
Ce modèle a été proposé pour prendre en compte une variation du module élastique de la barre **entre deux phases de calcul successives dans le cas d'un calcul phasé**. La perte de raideur se traduit par une diminution de l'effort dans la barre, dont une partie est reportée sur les éléments voisins. On donne le module actuel et le module correspondant à l'étape de calcul précédente.

Paramètres du modèle élastique linéaire – fragile pour les barres (IMOD=7) :

- module d'Young (YOUNG) [Pa] ;
- Valeur limite de l'effort normal en traction (F_{MAX}) [N] ;
- Valeur limite de l'effort normal en compression (F_{MIN}) [N] ;
- Module d'Young a l'étape de calcul précédente (EREF) [Pa] ;
- aire de la section (S) [m²].

8.2.6. Comportement élastique bilinéaire – parfaitement plastique (IMOD= 14)

Ce modèle propose de prendre en compte une élasticité bilinéaire avant la phase d'écoulement plastique, comme le montre la figure.



Paramètres du modèle élastique linéaire – fragile pour les barres (IMOD=14):

- module d'Young initial E (YOUNG) [Pa] ;
- module d'Young secondaire E_2 (YOUNG2) [Pa] ;
- Déformation définissant la transition entre les deux modules, en traction ϵ_{ts} (EPSTS) [-] ;
- Déformation pour laquelle on atteint le régime plastique en traction ϵ_{tl} (EPSTL) [-] ;
- Déformation définissant la transition entre les deux modules, en compression ϵ_{cs} (EPSCS) [-] ;
- Déformation pour laquelle on atteint le régime plastique en compression ϵ_{cl} (EPSCL) [-] ;
- aire de la section (s) [m^2].

8.2.7. Comportements non disponibles

On pourrait compléter la gamme de modèles ci-dessus en proposant de modéliser un écrouissage, ou une perte de résistance de la barre (due à la corrosion par exemple).

9. Modèles d'interaction barre/massif

9.1. Éléments de barre avec frottement

Les éléments de barre classiques, utilisés en association avec des éléments de massif pour représenter des milieux renforcés (murs en terre armée, talus cloués, etc.), ne permettent pas de limiter l'effort transmis aux barres par le sol : l'interaction mécanique entre la barre et le matériau qui l'entoure se résume à une condition d'adhérence parfaite. Autrement dit, il ne peut pas y avoir de rupture de l'interface entre les matériaux.

Ce type de modèles ne permet pas de décrire finement l'interaction mécanique entre la barre et le matériau environnant. Une solution consiste à introduire une description cinématique plus riche, qui autorise un déplacement relatif δ entre la barre et le sol. On peut alors relier la (densité linéique de) force transmise à la barre, notée l , à ce déplacement relatif, et l'astreindre à respecter un critère de résistance, pour prendre en compte une limite sur le frottement que l'on peut mobiliser entre les deux milieux.

Différents modèles sont disponibles, qui sont formellement analogues aux modèles introduits pour les barres elles-mêmes, mais concernent leur interaction avec les éléments de massif avec lesquels elles ont des nœuds communs.

NB : ces éléments appartiennent à une famille d'éléments spécifique (famille 435, codes KRB2/KRB3 en 2D, KRT2/KRT3 en 3D, le dernier chiffre correspondant au nombre de nœuds de l'élément).

9.2. Principe d'utilisation

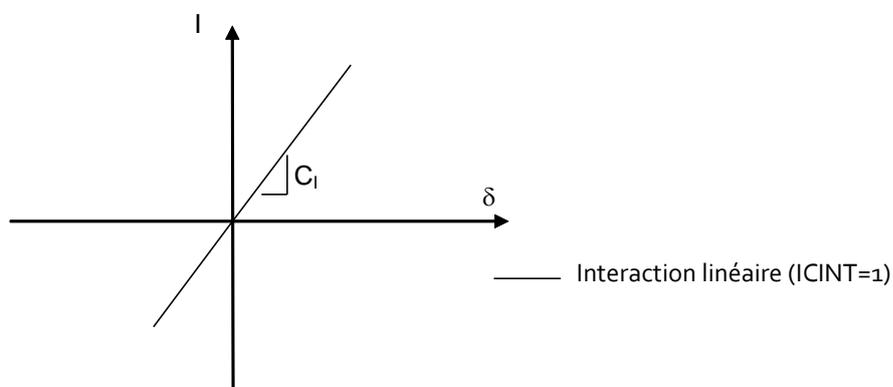
On donne sur une première ligne, les paramètres décrivant le comportement de la barre ; puis sur une deuxième ligne, les paramètres associés au modèle décrivant l'interaction mécanique entre la barre et le milieu environnant.

La structure des données est donc similaire à celle des comportements mécaniques à composantes pour les éléments de massif, à ceci près qu'il n'y a pas de mot-clé explicite dans le jeu de données.

9.3. Modèles d'interaction

9.3.1. Interaction linéaire (ICINT=1)

Le modèle le plus simple correspond à une relation linéaire entre la force d'interaction (en N/m) et le déplacement relatif δ (en m). Le coefficient d'interaction C_i (tel que $l = C_i \delta$) est donc homogène à une contrainte.

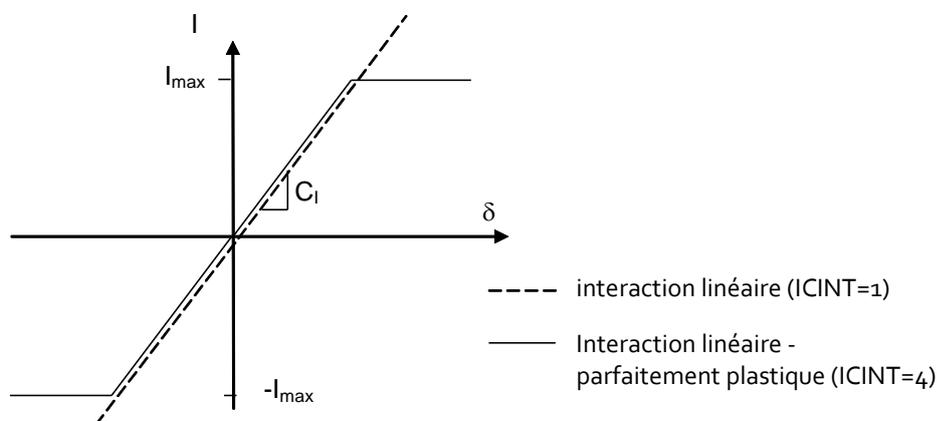


Paramètres du modèle linéaire pour l'interaction barre-sol :

- coefficient d'interaction (C_i) [N/m^2].

9.3.2. Interaction linéaire parfaitement plastique (ICINT=4)

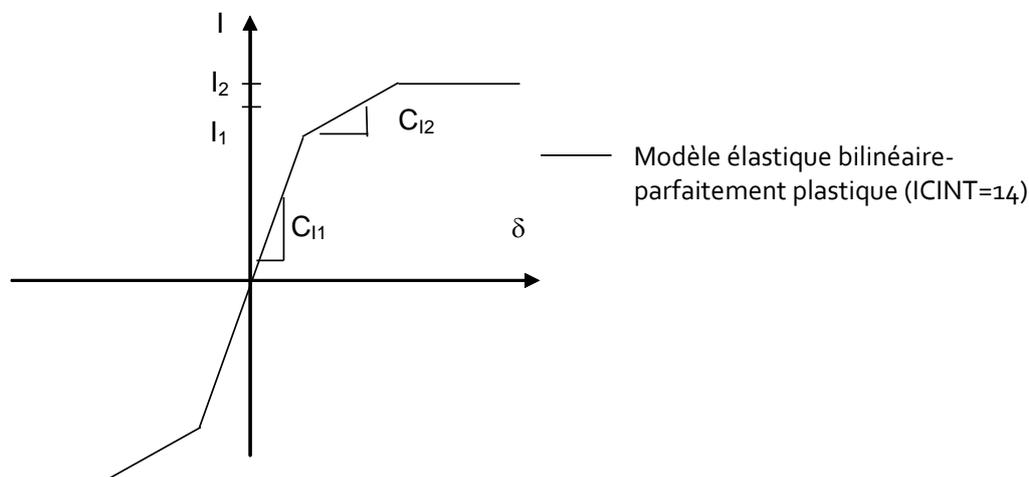
Ce modèle limite à la valeur I_{\max} la force que l'on peut transmettre à la barre par unité de longueur. Au-delà, la barre glisse librement par rapport au milieu environnant.



Paramètres du modèle linéaire-parfaitement plastique pour l'interaction barre-sol :

- coefficient d'interaction (C_1) [N/m^2] ;
- Valeur maximale de la force linéique d'interaction (I_{MAX}) [N/m] .

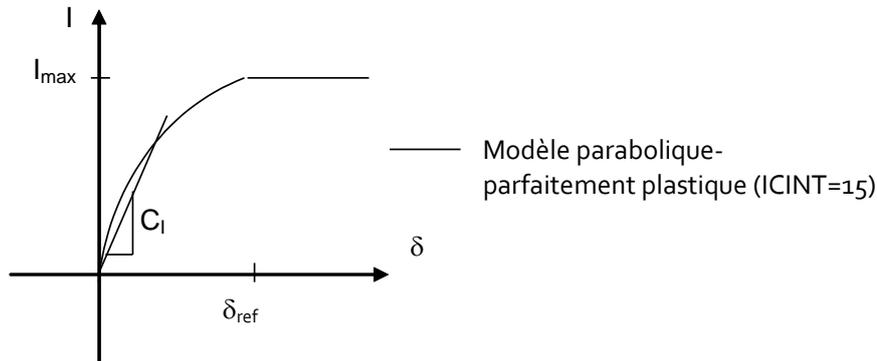
9.3.3. Interaction bilinéaire parfaitement plastique (ICINT=14)



Paramètres du modèle d'interaction bilinéaire –parfaitement plastique :

- coefficient d'interaction initial C_{11} (C_{I1}) [Pa] ;
- coefficient d'interaction secondaire C_{12} (C_{I2}) [Pa] ;
- Valeur de la force d'interaction marquant la transition entre les deux coefficients d'interaction I_1 (I_1) [N/m] ;
- Valeur maximale de la force d'interaction I_2 (I_2) [N/m].

9.3.4. Interaction parabolique parfaitement plastique (ICINT=15)



$$I = \text{Min} [C_i \delta, I_{\text{max}} (\delta/\delta_{\text{ref}})^{1/2}, I_{\text{max}}]$$

Paramètres du modèle d'interaction parabolique – parfaitement plastique (ICINT=15) :

- coefficient d'interaction initial C_i (CI) [Pa] ;
- Valeur du déplacement relatif δ_{ref} pour laquelle on atteint la force maximale (D_{REF}) [m] ;
- Valeur maximale de la force d'interaction $I_{\text{max}}(I_{\text{MAX}})$ [N/m].

9.3.5. Modèles d'interaction bilinéaire parfaitement plastique Newton-I et Newton-II (ICINT=16 et ICINT=17)

Le projet FUI Newton (2012-2016), piloté par Solétanche Bachy, a donné lieu à une collaboration avec Armines, qui a effectué des essais d'arrachement sur des boulons, en utilisant un dispositif expérimental spécifiquement adapté aux caractéristiques des matériaux testés. Ce travail a débouché sur l'identification de modèles caractérisant l'interaction. On présente ici deux de ces modèles qui ont été intégrés dans CESAR.

Les deux modèles proposés se distinguent par la description de l'interaction (par une force linéique ou par une contrainte de cisaillement limite) et par les paramètres retenus pour décrire la courbe d'interaction, mais restent très voisins. Il faut enfin signaler que les résultats expérimentaux obtenus par Armines sont nettement plus riches que ce qu'on a présenté ici ; ils ont en particulier donné lieu à l'élaboration d'un troisième modèle d'interface, qui propose une loi de variation plus progressive pour la force linéique d'interaction et qui décrit un pic de résistance de l'interaction sol-boulon. On pourrait envisager d'étendre la gamme de modèles disponibles dans CESAR.

Interprétation des résultats expérimentaux

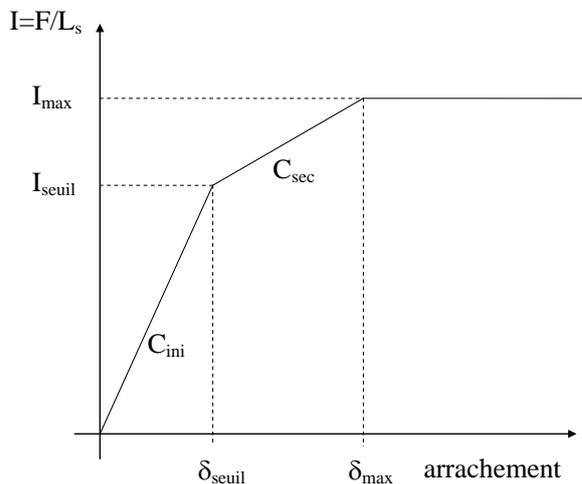
La préparation des essais effectués par Armines comporte plusieurs étapes : on constitue, dans une cuve cylindrique, un échantillon d'un matériau artificiel, dont on maîtrise la composition et les caractéristiques mécaniques, on réalise un forage dans l'échantillon selon des procédés qui reproduisent le forage des boulons sur un chantier de tunnel réel, on place dans le forage une inclusion en fibre de verre que l'on scelle à l'échantillon à l'aide d'une résine du type de celles utilisées sur chantier. L'essai consiste à exercer une force axiale pour arracher le boulon de l'échantillon. La rupture se produit à l'interface entre la résine et l'échantillon de sol. L'essai donne une courbe donnant la force F appliquée à la tête du boulon en fonction de son déplacement δ .

Après avoir vérifié que les résultats étaient reproductibles, la campagne d'essais a permis d'étudier l'influence de différents paramètres, comme la longueur de scellement L , et la contrainte de confinement autour du boulon. On propose de modéliser les courbes expérimentales par des courbes trilineaires.

La force mesurée intègre, sur la longueur du boulon, les efforts de cisaillement à l'interface entre le scellement et le sol. Les résultats peuvent être directement exploités, en faisant l'hypothèse que la déformabilité du boulon en fibre de verre est très faible par rapport à celle du sol : l'arrachement mesuré est alors pratiquement égal au déplacement relatif entre le sol et le boulon sur toute sa longueur ; on fait également l'hypothèse que l'effort se répartit à peu près uniformément sur la longueur du boulon. On définit donc la force linéique d'interaction entre le sol et le boulon, notée I , comme le rapport F/L .

Dans ce cadre, le modèle trilineaire se caractérise par quatre paramètres :

- la valeur maximale de la force d'interaction I , notée I_{\max} , représente la force maximale que le boulon peut transmettre au sol par unité de longueur ;
 - la valeur I_{seuil} de la force d'interaction I correspondant à la première rupture de pente ;
 - les deux valeurs correspondantes du déplacement relatif, qu'on notera δ_{\max} et δ_{seuil}
- (On peut également choisir comme paramètres I_{\max} et I_{seuil} , et les deux pentes de la courbe I - δ , la pente initiale C_{ini} et la pente secondaire C_{sec} .)



Le dispositif expérimental d'Armines permettait de contrôler la contrainte de confinement autour du boulon. Pour les calculs des tunnels, on peut faire deux hypothèses sur l'état de contrainte qui règne dans le sol autour des boulons après leur mise en place :

- la contrainte de confinement est directement contrôlée par la pression d'injection du coulis ;
- la contrainte de confinement est liée à la profondeur du boulon, au poids des terres, et au coefficient K_0 :

$$p_c = \gamma z (1 + 2K_0)/3$$

Dans ce deuxième cas, on a une variation des caractéristiques mécaniques de l'interaction sol-boulon entre le haut et le bas du front (en particulier pour un tunnel peu profond).

Pour couvrir les deux situations, on prend en compte une valeur de p_c donnée par :

$$p_c = A z + B$$

Les résultats expérimentaux montrent que les rapports $I_{\text{seuil}}/I_{\max}$ et $\delta_{\text{seuil}}/\delta_{\max}$ varient peu d'un essai à l'autre. On propose de synthétiser les résultats en prenant :

$$p_c = A z + B$$

$$I_{\max} = C_1 p_c + C_2$$

$$\delta_{\max} = C_3 p_c + C_4$$

$$I_{\text{seuil}} / I_{\text{max}} = C_5$$

$$\delta_{\text{seuil}} / \delta_{\text{max}} = C_6$$

$$C_{\text{ini}} = I_{\text{seuil}} / \delta_{\text{seuil}}$$

$$C_{\text{sec}} = (I_{\text{max}} - I_{\text{seuil}}) / (\delta_{\text{max}} - \delta_{\text{seuil}})$$

Paramètres du modèle d'interaction bilinéaire – parfaitement plastique Newton 1 (ICINT=16) :

- A [Pa/m], B [Pa] : paramètres décrivant la variation linéaire de p_c avec z ;
- $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$

On peut revisiter les résultats pour les mettre sous une forme différente, qui donne plus de poids au changement de valeur de la pente des courbes. On choisit comme paramètres le rapport $F_{\text{max}}/F_{\text{seuil}}$ ou $I_{\text{max}}/I_{\text{seuil}}$. D'autre part, on caractérise la résistance de l'interface non pas en termes de force linéique d'interaction, mais de contrainte de cisaillement à l'interface ; cela permet de transposer les résultats d'un essai pour un diamètre de forage donné à un boulon dans un forage plus grand ou plus petit, la force linéique d'interaction et la contrainte de cisaillement τ étant liés par :

$$\pi d L \tau = I$$

où d désigne le diamètre de l'interface scellement/sol (supposée de forme cylindrique).

La valeur maximale τ_c de la contrainte de cisaillement le long d'un boulon est alors donnée, en fonction de la contrainte de confinement p_c par :

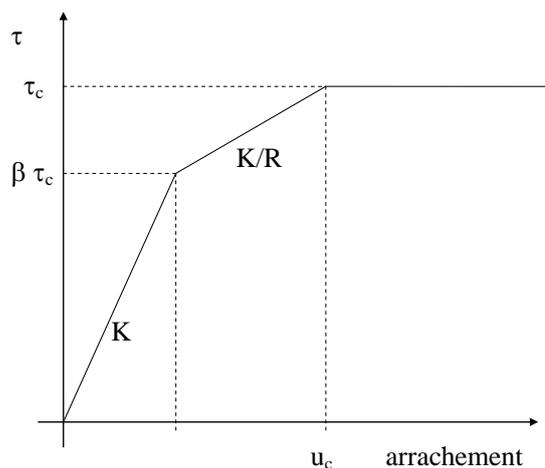
$$\tau_c = \alpha p_c + \tau_o$$

Le déplacement relatif pour lequel on obtient la rupture de l'interface est donné par :

$$u_c = u_{\text{ref}} (\tau_c / p_c) - u_o$$

La valeur initiale de la raideur de l'interface est notée K . Lorsque la contrainte de cisaillement dépasse un seuil noté $\tau_t = \beta \tau_c$, la raideur est divisée par R .

La valeur de référence de R est égale à 5, et celle de β est égale à 0,75.



La valeur du déplacement qui correspond à la transition entre les deux valeurs de raideur est égale à $u_t = \beta \tau_c / K$.

Pour $u \in [u_t, u_c]$, on a :

$$\tau = \tau_t + K/R (u - u_t)$$

La condition $\tau (u=u_c) = \tau_c$ donne :

$$\beta \tau_c + K/R (u_c - \beta \tau_c / K) = \tau_c$$

et permet de fixer la valeur de la raideur initiale

$$K = \frac{\tau_c [R - \beta (R-1)]}{u_c}$$

et finalement Cini est donné par : $C_{ini} = \pi d K$

En résumé, le modèle d'interaction ICINT=17 introduit dans CESAR est décrit par les équations suivantes :

Paramètres d'entrée : A, B, d, α , τ_0 , u_{ref} , u_0 , β , R

$$p_c = A z + B \quad ; \quad \tau_c = \alpha p_c + \tau_0$$

$$u_c = u_{ref} (\tau_c / p_c) - u_0 \quad ; \quad K = \frac{\tau_c [R - \beta (R-1)]}{u_c}$$

$$C_{ini} = \pi d K \quad ; \quad C_{sec} = C_{ini}/R ;$$

$$I_{max} = \pi d \tau_c \quad ; \quad I_{seuil} = \beta I_{max}$$

On peut proposer de maintenir β et R à leurs valeurs de référence.

Paramètres du modèle d'interaction bilinéaire – parfaitement plastique Newton 2 (ICINT=17) :

- A [Pa/m], B [Pa] : paramètres décrivant la variation linéaire de p_c avec z ;
- d diamètre de l'inclusion
- α , τ_0 : paramètres de la variation de la contrainte de cisaillement maxi en fonction de p_c
- u_{ref} , u_0 : paramètres décrivant le glissement pour lequel se produit l'arrachement
- β valeur définissant le rapport entre la contrainte de cisaillement pour laquelle se produit le changement de raideur et la contrainte maximale
- R rapport de la raideur initiale sur la raideur secondaire

9.3.6. Comportements non disponibles

Rupture de l'interface avec retour à zéro de la force d'interaction

Ecrouissage négatif

10. Éléments de poutre

CESAR propose deux types d'éléments de poutre : des éléments de poutre « classiques » et des éléments de poutre « multifibre » (uniquement disponibles en 3D). Par souci de simplicité, les éléments appartiennent à la même famille, le choix entre le type de poutres étant déterminé par la valeur de l'indicateur IMOD.

10.1. Poutres classiques

10.1.1. Elasticité linéaire (IMOD=1, 12, 13, 14, 15, 16, 101, 113, 114, 115 ou 116)

Pour les poutres classiques de CESAR, le modèle de base est le modèle élastique linéaire IMOD=1.

Différents autres modèles (IMOD= 12, 13, 14, 15, 16, 101, 113, 114, 115 ou 116) ont été intégrés pour tester l'influence de la stratégie numérique d'intégration ou de prise en compte ou non de certains termes dans l'énergie élastique. Ces variantes conduisent à des éléments plus ou moins « raides ». Les paramètres sont les mêmes que ceux du modèle de base.

Paramètres des modèles élastiques linéaires en 2D

Paramètres mécaniques :

- Masse volumique (RO) [kg m^{-3}]
- Module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- Coefficient de Poisson ν (POISS) [-]

Paramètres géométriques :

- Aire de la section droite S [m^2].
- Section réduite au cisaillement S_r (SR) [m^2].
- Moment d'inertie principal de la section, dans les axes locaux de l'élément (VIN) [m^4].
- Ordonnée de l'axe des centres de gravité de la section (YG) [m].

Paramètres des modèles élastiques linéaires en 3D

Paramètres mécaniques :

- Masse volumique (RO) [kg m^{-3}]
- Module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- Coefficient de Poisson ν (POISS) [-]

Paramètres géométriques :

- Aire de la section droite S [m^2].
- Sections réduites au cisaillement S_2, S_3 (S2,S3) [m^2].
- Moment d'inertie de torsion VI1 [m^4].
- Moment d'inertie principaux par rapport aux axes x_2 et x_3 (VI2,VI3) [m^4].
- Coordonnées, dans les axes locaux (x_2, x_3), de l'axe des centres de gravité des sections de l'élément. YG, ZG [m].

- Coordonnées, dans les axes locaux (x2, x3), de l'axe des centres de torsion des sections de l'élément. YC, ZC [m].
- V : Vecteur direction du premier axe d'inertie (x2).

10.1.2. Elasticité linéaire avec fluage (IMOD=2)

Pour les poutres classiques, CESAR propose une modélisation simplifiée du fluage (pour un comportement élastique linéaire) entre deux étapes de calculs. L'utilisateur fournit le module de Young dans la situation actuelle (finale) et sa valeur initiale avant fluage.

Paramètres du modèle élastique linéaire avec fluage pour les poutres classiques en 2D (IMOD=2)

Paramètres mécaniques :

- masse volumique (RO) [kg m⁻³]
- module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- module d'Young initial Eref (YOUNGREF) [Pa]

Paramètres géométriques :

- Aire de la section droite S [m²].
- Section réduite au cisaillement S_r (SR) [m²].
- moment d'inertie principal de la section, dans les axes locaux de l'élément (VIN) [m⁴].
- Ordonnée de l'axe des centres de gravité de la section (YG) [m].

Paramètres du modèle élastique linéaire avec fluage pour les poutres classiques en 3D (IMOD=2)

Paramètres mécaniques :

- masse volumique (RO) [kg m⁻³]
- module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]
- module d'Young initial Eref (YOUNGREF) [Pa]

Paramètres géométriques :

- Aire de la section droite S [m²].
- Sections réduites au cisaillement S₂, S₃ (S2,S3) [m²].
- moment d'inertie de torsion VI1 [m⁴].
- moment d'inertie principaux par rapport aux axes x2 et x3 (VI2,VI3) [m⁴].

- Coordonnées, dans les axes locaux (x2, x3), de l'axe des centres de gravité des sections de l'élément. YG, ZG [m].
 - Coordonnées, dans les axes locaux (x2, x3), de l'axe des centres de torsion des sections de l'élément. YC, ZC [m].
- V : Vecteur direction du premier axe d'inertie (x2).

10.2. Poutres multifibres (IMOD=5) - en 3D uniquement

En 3D, les éléments de poutre multifibre permettent de prendre en compte :

- plusieurs fibres pouvant éventuellement présenter des comportements mécaniques différents
- un comportement non-linéaire pour chacune des fibres

L'idée est de donner le nombre de fibres pour les éléments du groupe considéré, le nombre de modèles de comportement différents pour décrire le comportement des fibres. On précise ensuite pour chacun de ces modèles les paramètres à prendre en compte, et pour chaque fibre, on précise l'aire de la section de la fibre, les coordonnées du centre de la fibre dans le repère local, le numéro du modèle à prendre en compte (dans la liste définie précédemment).

Les modèles disponibles pour les fibres, associés à l'indicateur IMODF, sont un sous ensemble des modèles « classiques » disponibles pour les éléments de massif des familles 01/02 (voir 3.2) :

- IMODF=1 : élasticité linéaire isotrope
- IMODF=11 : von Mises sans écrouissage
- IMODF=12 von Mises avec écrouissage
- IMODF=15 critère parabolique
- IMODF=47 Willam Warnke standard
- IMODF=48 Willam Warnke modifié

1 1. Éléments de coque

Le solveur CESAR permet d'utiliser deux types d'éléments de coque : des éléments dits « classiques » et des éléments multicouches. Il s'agit d'éléments finis de formulations différentes, mais pour l'utilisateur, la distinction se fait simplement en choisissant le modèle IMOD=1 pour les coques classiques et IMOD=2 pour les coques multicouches.

11.1. Coques classiques (IMOD=1)

On distingue :

- les éléments de coque à trois ou quatre nœuds, qui reposent sur les hypothèses cinématiques de type Kirchhoff Love, bien adaptés aux coques minces et aux plaques en flexion pure ;
- les éléments de coque à 6 ou 8 nœuds, qui reposent sur les hypothèses de Mindlin : ils rendent mieux compte du cisaillement transversal, et sont adaptés à des structures épaisses.

Les éléments de coques classiques sont élastiques linéaires.

NB : Dans l'état actuel de la programmation du code, on fournit dans le module ELEM non seulement les caractéristiques mécaniques, mais aussi des paramètres géométriques (pour des éléments d'épaisseur variable d'un nœud à l'autre), et un indicateur relatif au type de résultats que l'on souhaite (en termes d'efforts).

Paramètres des modèles élastiques linéaires pour les coques classiques (IMOD=1)

Paramètres mécaniques :

- masse volumique (RO) [kg m^{-3}]
- module d'Young E (YOUNG) [Pa]
- coefficient de Poisson ν (POISS) [-]

Paramètres géométriques :

- épaisseurs de l'élément aux différents nœuds

11.2. Coques multicouches (IMOD=2)

Les coques multicouches sont des éléments qui représentent un empilement de couches, auxquelles on peut donner une loi de comportement « de couche », associée à une valeur de l'indicateur IMODC, à choisir dans la liste suivante :

IMODC = 1 Elasticité linéaire isotrope.

IMODC = 11 Von Mises sans écrouissage.

IMODC = 12 Von Mises avec écrouissage.

IMODC = 15 Critère parabolique.

IMODC = 47 Willam-Warnke standard (3 paramètres).

IMODC = 48 Willam-Warnke modifié (4 paramètres).

Il s'agit des mêmes modèles de comportement que pour les éléments de massif : on se reportera donc à la section 3.2. On notera que ni les autres modèles « classiques » ni les modèles « à composantes » ne sont disponibles pour les coques multicouches.

12. Recommandations pour le choix d'un modèle de comportement pour quelques ouvrages types

12.1. Fondations superficielles

12.2. Fondations profondes

12.3. Stabilité d'un talus

12.4. Dimensionnement du revêtement d'un tunnel

12.5. Tassements provoqués par le creusement d'un tunnel peu profond

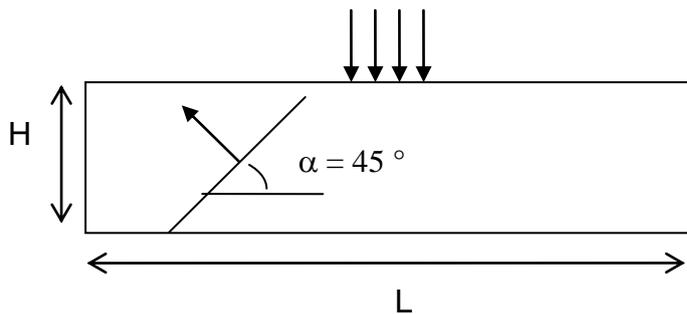
12.6. Ecran de soutènement

13. Exemples de mise en œuvre / éléments de validation

On se propose de donner ici un exemple de mise en œuvre simple de certains des modèles proposés ici. Lorsque c'est possible, on indique quels éléments permettent de valider les résultats obtenus.

13.1. Elasticité isotrope transverse (IMOD=2 / IELAS=2)

On considère en déformation plane une couche de sol anisotrope, présentant un pendage de 45 degrés par rapport à l'horizontale, comme indiqué sur la figure 1. Les dimensions du domaine maillé sont : $L=16$ m ; $H = 5$ m. Le maillage est constitué de quadrangles à 8 nœuds, carrés, de 1 m de côté. La couche est soumise à une pression uniforme p en surface, sur une largeur de 2 m. Les conditions aux limites sont standard ($u=0$ sur les deux côtés gauche et droit du maillage ; $v=0$ sur la face inférieure).



calculs en élasticité (calculs cadre_imod2.data et cadre_bao2.data)

On adopte les valeurs suivantes pour les paramètres élastiques :

$$E_1 = 40 \text{ MPa} ; E_2 = 125 \text{ MPa} ; \nu_1 = 0,25 ; \nu_2 = 0,25 ; G = 50 \text{ MPa} ; \theta = \alpha = 45 \text{ degrés}$$

On compare les résultats obtenus avec le modèle habituel IMOD=2 de CESAR, et avec les modèles de comportement à composantes, pour une pression appliquée de 150 kPa. Les données prennent la forme suivante dans le fichier .data :

pour IMOD=2 :

sol

2 1 .02 40. 125. .25 .25 50. 45.

pour IMOD=10000 :

sol

10000 1

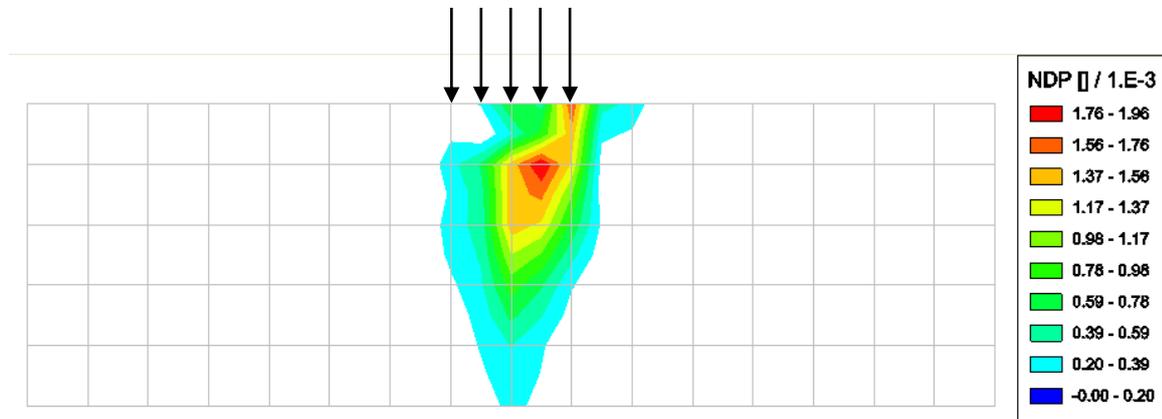
ELAS 2 40. 125. .25 .25 50. 45.

On rappelle que l'on peut obtenir le contenu des fichiers rsv4 sous forme d'un fichier texte, qui porte l'extension .cfor, en utilisant le module GEFI avec les options «1 1 » (à placer juste avant MCNL dans le jeu de données).

La concordance entre les fichiers obtenus est parfaite.

Notes : on observe que l'indicateur INAT se retrouve sur la même ligne que la valeur 10000, et que la valeur du poids volumique est omise.

L'intérêt de l'utilisation des modèles à composantes réside dans le fait qu'elle permet de faire des calculs en condition tridimensionnelle, d'associer le modèle de Mohr-Coulomb avec une élasticité anisotrope et un écrouissage, ou encore d'utiliser une élasticité anisotrope avec n'importe quel critère de plasticité.



Isovaleurs des déformations plastiques : l'anisotropie induit une réponse non symétrique bien que le chargement soit une pression uniforme.

13.2. Elasticité linéaire isotrope avec modules variables avec la profondeur

On considère une couche de sol horizontale, d'épaisseur H , reposant sur un substratum rigide. On étudie les déformations qui résulteraient de l'application d'une contrainte uniforme en surface $-p \underline{e}_y$ (avec $p = 100$ kPa).

Le sol se déforme en condition œdométrique, ce qui permet de se ramener à un problème unidimensionnel. On suppose que la couche est hétérogène, et que son module dépend de la profondeur. Compte tenu des hypothèses faites, on peut utiliser un maillage constitué d'une seule colonne d'éléments superposés : on bloque le déplacement horizontal sur les côtés verticaux du maillage, et le déplacement vertical sur sa base. On prend ici en compte un maillage comportant vingt quadrangles à huit nœuds carrés de hauteur $H/20$. La base du maillage se trouve en $z=0$, et sa face supérieure en $z=H$.

1/ Cas d'un module linéaire avec la profondeur (coln_nel1.data et coln_tr1.data)

On considère le cas où le module varie linéairement entre E_1 en surface ($z=H$) et $E_2 > E_1$ à la profondeur du substratum ($z=0$) :

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) z/H$$

Le coefficient de Poisson est constant et égal à 0,3. On définit le module œdométrique par :

$$E_{\text{oad}}(z) = E(z) \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \alpha + \beta z$$

$$\text{avec } \alpha = E_2 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \beta = \frac{E_1 - E_2}{H} \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

La solution du problème est donnée par :

$$\sigma_{zz} = -p ; \varepsilon_{zz} = -p / E_{oed}(z) ; \xi_z = -p / \beta \ln(1 + \beta z/\alpha)$$

On compare les résultats obtenus numériquement avec le modèle IELAS=1, et avec un maillage dans lequel on associe chaque élément du maillage à un groupe différent de manière à pouvoir faire varier (manuellement) le module d'une couche à l'autre (on numérote les éléments de 1 à 20 de bas en haut, et on attribue à la couche i le module correspondant à la valeur à mi-hauteur : $E_2 + (E_1 - E_2)(z_i + z_{i+1})/2H$).

On prend à titre d'exemple $E_1=100$ MPa, $E_2 = 300$ MPa. Pour le calcul comportant 20 groupes d'éléments, on calcule donc le module dans la couche i par $E(i) = (295 - 10*i)$ (MPa). Pour le modèle avec variation du module, tous les éléments appartiennent au même groupe, auquel on attribue les propriétés suivantes :

sol

10000 1

ELAS 1 300 0.3 -10. 0.

On reconnaît les deux valeurs de E et ν pour $z = 0$, et le gradient vertical (-10 MPa/m : le module diminue lorsque z augmente, c'est-à-dire lorsque la profondeur diminue).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs calculées et les erreurs relatives par rapport à la solution analytique (définies par : erreur relative = $\frac{\text{solution numérique}}{\text{solution analytique}} - 1$). Les deux calculs numériques donnent une très bonne approximation de la solution analytique, mais l'erreur relative sur le déplacement est sensiblement plus faible, à maillage égal, avec le modèle qui prend en compte les variations de modules.

z (m)	xi (analyt)	xi (ielas=1)	xi (20 groupes)	erreurs relatives	
				ielas = 1	20 groupes
0	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00		
1	-2.5184E-04	-2.5184E-04	-2.5182E-04	-3.90E-07	-9.57E-05
2	-5.1252E-04	-5.1252E-04	-5.1247E-04	-9.25E-07	-9.85E-05
3	-7.8268E-04	-7.8268E-04	-7.8260E-04	-1.49E-07	-1.04E-04
4	-1.0630E-03	-1.0630E-03	-1.0629E-03	-4.55E-06	-1.08E-04
5	-1.3544E-03	-1.3544E-03	-1.3542E-03	9.54E-07	-1.10E-04
6	-1.6576E-03	-1.6576E-03	-1.6574E-03	1.32E-06	-1.19E-04
7	-1.9738E-03	-1.9738E-03	-1.9736E-03	2.56E-06	-1.24E-04
8	-2.3040E-03	-2.3040E-03	-2.3037E-03	8.51E-07	-1.29E-04
9	-2.6496E-03	-2.6496E-03	-2.6492E-03	1.77E-06	-1.34E-04
10	-3.0120E-03	-3.0120E-03	-3.0116E-03	1.16E-06	-1.42E-04
11	-3.3931E-03	-3.3931E-03	-3.3926E-03	-7.13E-07	-1.51E-04
12	-3.7947E-03	-3.7947E-03	-3.7941E-03	-1.22E-06	-1.62E-04

13	-4.2193E-03	-4.2193E-03	-4.2186E-03	1.51E-09	-1.73E-04
14	-4.6697E-03	-4.6697E-03	-4.6688E-03	-9.27E-07	-1.85E-04
15	-5.1491E-03	-5.1491E-03	-5.1481E-03	-6.49E-07	-2.01E-04
16	-5.6616E-03	-5.6616E-03	-5.6604E-03	-3.21E-07	-2.18E-04
17	-6.2121E-03	-6.2121E-03	-6.2106E-03	2.93E-07	-2.40E-04
18	-6.8067E-03	-6.8067E-03	-6.8049E-03	-1.69E-07	-2.65E-04
19	-7.4531E-03	-7.4531E-03	-7.4509E-03	-1.85E-07	-2.97E-04
20	-8.1611E-03	-8.1611E-03	-8.1584E-03	1.73E-08	-3.37E-04

2 / Cas d'un module variant en z^a (coln_nel8.data et coln_tr2.data)

On considère le même problème, mais avec une variation du module un peu différente :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1) (1-z/H)^2$$

E est encore égal à E_1 à la surface du massif ($z=H$), et à E_2 au niveau du substratum ($z=0$). On notera que, sur l'ensemble de l'intervalle $[0,H]$, le module est inférieur au module donné par une variation linéaire vis-à-vis de la profondeur.

Le coefficient de Poisson est encore égal à 0,3. On définit le module oedométrique par :

$$E_{\text{oed}}(z) = A + B (1-z/H)^2$$

$$\text{avec } A = E_1 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad B = (E_2 - E_1) \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

La solution du problème est donnée par :

$$\xi_z = \frac{pH}{\sqrt{AB}} \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{B}{A}} (1-z/H) \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right]$$

Pour le maillage constitué de 20 groupes, on calcule les modules au milieu de chaque élément, ce qui donne les valeurs suivantes : 290.125, 271.125, 253.125, 236.125, 220.125, 205.125, 191.125, 178.125, 166.125, 155.125, 145.125, 136.125, 128.125, 121.125, 115.125, 110.125, 106.125, 103.125, 101.125 et 100.125 MPa de bas en haut).

Pour le modèle avec prise en compte des variations du module, on donne dans le jeu de données les lignes suivantes :

sol

10000 1

ELAS 8 100. 0.5 20. 2. 0.3

Note : le module est calculé suivant $E = E_0 + k (h-z)^\alpha$

Les paramètres à fournir sont dans l'ordre : E, k, h, α , ν .

Ici E_0 est égal à la valeur de E pour $z=H$ (soit $E_1 = 100$ MPa) ; $H = 20$ m ; $\alpha = 2$; $\nu = 0,3$

et la valeur de k est calculée suivant : $k = (E_2 - E_1) / H^2$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs calculées et les erreurs relatives par rapport à la solution analytique (définies par : erreur relative = $\frac{\text{solution numérique}}{\text{solution analytique}} - 1$). Les deux calculs numériques donnent une très bonne approximation de la solution, celle du modèle avec prise en compte des variations de modules étant significativement plus précise.

z (m)	xi (analyt)	xi (ielas=8)	xi (20 groupes)	erreurs relatives	
				ielas =8	20 groupes
0	0.0000E+00	0.00E+00	0.00E+00		
1	-2.5611E-04	-2.56E-04	-2.56E-04	4.33E-07	-2.34E-04
2	-5.3016E-04	-5.30E-04	-5.30E-04	5.03E-07	-2.33E-04
3	-8.2370E-04	-8.24E-04	-8.24E-04	3.15E-07	-2.34E-04
4	-1.1384E-03	-1.14E-03	-1.14E-03	-5.04E-07	-2.29E-04
5	-1.4759E-03	-1.48E-03	-1.48E-03	2.23E-06	-2.28E-04
6	-1.8382E-03	-1.84E-03	-1.84E-03	-1.33E-06	-2.30E-04
7	-2.2269E-03	-2.23E-03	-2.23E-03	2.09E-06	-2.22E-04
8	-2.6440E-03	-2.64E-03	-2.64E-03	-5.63E-07	-2.16E-04
9	-3.0913E-03	-3.09E-03	-3.09E-03	1.48E-06	-2.06E-04
10	-3.5702E-03	-3.57E-03	-3.57E-03	1.11E-06	-1.92E-04
11	-4.0821E-03	-4.08E-03	-4.08E-03	1.04E-06	-1.78E-04
12	-4.6278E-03	-4.63E-03	-4.63E-03	-6.18E-07	-1.58E-04
13	-5.2076E-03	-5.21E-03	-5.21E-03	-1.36E-07	-1.36E-04
14	-5.8208E-03	-5.82E-03	-5.82E-03	8.95E-07	-1.11E-04
15	-6.4660E-03	-6.47E-03	-6.47E-03	7.28E-07	-8.28E-05
16	-7.1404E-03	-7.14E-03	-7.14E-03	-2.90E-07	-5.21E-05
17	-7.8401E-03	-7.84E-03	-7.84E-03	-5.02E-07	-2.09E-05
18	-8.5602E-03	-8.56E-03	-8.56E-03	-5.40E-07	1.11E-05
19	-9.2945E-03	-9.29E-03	-9.29E-03	1.52E-07	4.10E-05
20	-1.0036E-02	-1.00E-02	-1.00E-02	3.85E-06	6.36E-05

13.3. Apport des modèles élastiques non linéaires

13.3.1. Elasticité type Cam-Clay

On ne s'intéresse qu'à la partie élastique du modèle, sans faire intervenir le critère de plasticité, et on se propose de modéliser un essai triaxial (drainé). La contrainte initiale est isotrope et égale à $p^0=200$ kPa. La contrainte verticale est égale à p^0+q , et on augmente progressivement le déviateur q , de 0 à 1 MPa, par incréments de 50 kPa.

On rappelle que le modèle d'élasticité non linéaire associé au modèle Cam-Clay est isotrope, avec $G=\text{cte}$ et $K= p(1+e_0)/\kappa = \alpha p$.

Il est facile de voir que la déformation volumique est donnée par :

$$d\varepsilon_v = - dp/K = \frac{dp}{K} = \frac{dp}{\alpha p} \Rightarrow \varepsilon_v = - \frac{\ln(1+q/3p^0)}{\alpha}$$

On a d'autre part, pour calculer la contrainte axiale :

$$E = 9KG/(3K+G)$$

$$d\varepsilon_1 = -dq/E = -3 \frac{dp}{E} = -\frac{3K+G}{3KG} dp = -\frac{3\alpha p+G}{3\alpha pG} dp \Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{q}{3G} - \frac{\ln(1+q/3p^0)}{3\alpha}$$

On représente ci-dessous les résultats analytiques et numériques obtenus pour

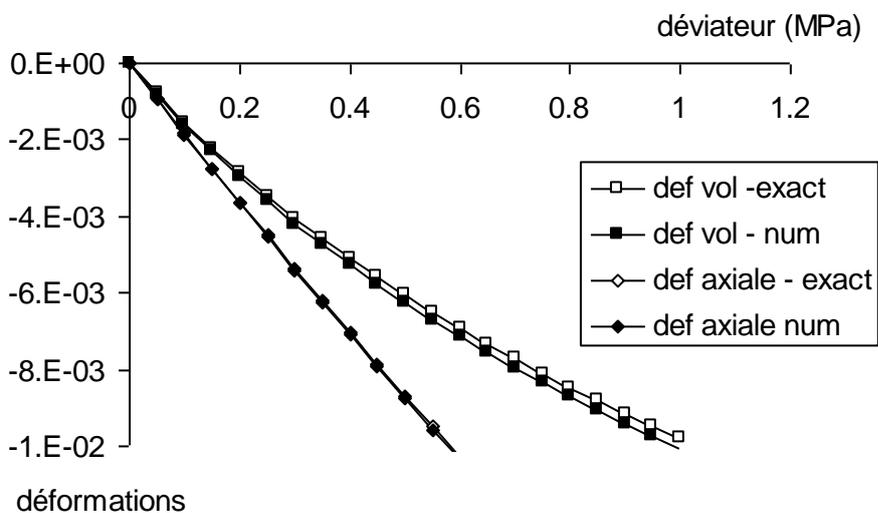
$G=25$ MPa, $e_0 = 1.$, $\kappa = 0.02$ (avec $K_{\min}=0.1$ MPa).

Les données correspondantes prennent la forme suivante :

sol

10000 2

ELAS 3 25. 1. 0.02 0.01



Notes :

1 / La prise en compte de l'élasticité non linéaire se limite à actualiser les modules au début de chaque incrément : on ne vérifie donc pas exactement la loi de comportement (en contrepartie, chaque incrément est effectué en une seule itération). On pourrait imaginer une programmation plus complète – au moins pour les lois élastiques dont la formulation permet de calculer l'erreur commise sur la loi de comportement.

13.3.2. élasticité type Fahey et Carter

L'introduction de ce type de loi élastique a été entreprise au cours du travail de thèse de Sophie Coquillay (2005). Si l'on cale les paramètres du modèle de Mohr-Coulomb, avec une élasticité linéaire, sur la pente initiale d'essais triaxiaux, on obtient une réponse trop raide lorsque l'on passe à l'échelle de l'ouvrage : la modélisation d'essais de chargement sur des fondations superficielles expérimentales à Labenne avait mis en évidence ce problème. A l'inverse, si l'on cherche des valeurs qui permettent de retrouver les résultats des essais sur ouvrages, les modules obtenus sont trop faibles pour représenter correctement les essais de laboratoire.

On présente ici un exemple de calage du modèle sur un essai triaxial réalisé sur du sable de Labenne : le modèle de Fahey et Carter permet de représenter un peu mieux la courbe $q - \varepsilon_1$ au cours du cisaillement, et en particulier de mieux reproduire sa courbure (essai CIS4 de la thèse de Sophie Coquillay, tiré d'un rapport interne du LCPC (Gestin, 1989)).

Essai : contrainte initiale isotrope 300 kPa ; on pilote l'essai en déformation (axiale).

Paramètres du critère et de la loi d'écoulement : $c = 1$ kPa ; $\varphi = 35.5^\circ$; $\psi = 8^\circ$

Paramètres du modèle de Mohr-Coulomb avec élasticité linéaire :

On a fait deux calculs, le premier avec $E = 96$ MPa (qui permet de retrouver la pente initiale de la courbe $q - \varepsilon_1$) et le deuxième avec $E = 32$ MPa (qui permet de trouver une déformation acceptable lorsque q atteint 90% de sa valeur ultime). Dans les deux cas, le coefficient de Poisson est égal à 0,3, et les données correspondantes sont donc :

calcul 1 :

sable

10 2 0. 96.e3 0.3 1. 35.5 8.5

calcul 2 :

sable

10 2 0. 32.e3 0.3 1. 35.5 8.5

Paramètres du modèle de Fahey et Carter (formulation complète : IELAS=4)

On associe le modèle élastique IELAS=4, avec un critère de Mohr Coulomb (ICRIT=4) et un potentiel d'écoulement de Mohr-Coulomb (mais l'angle de dilatance est différent de l'angle de frottement). Les paramètres pour le modèle de Fahey et Carter sont les suivants :

$n = 0,5$; $\nu = 0,25$; $f = 0,8$; $g = 1,8$; $C = 225$; $p_{ref} = 100$ kPa ; $c = 1$ kPa ; $\varphi = 35.5^\circ$

(on rappelle que dans ce modèle, les modules élastiques dépendent des caractéristiques de résistance). Les données figurant dans le jeu de données prennent alors la forme :

sable

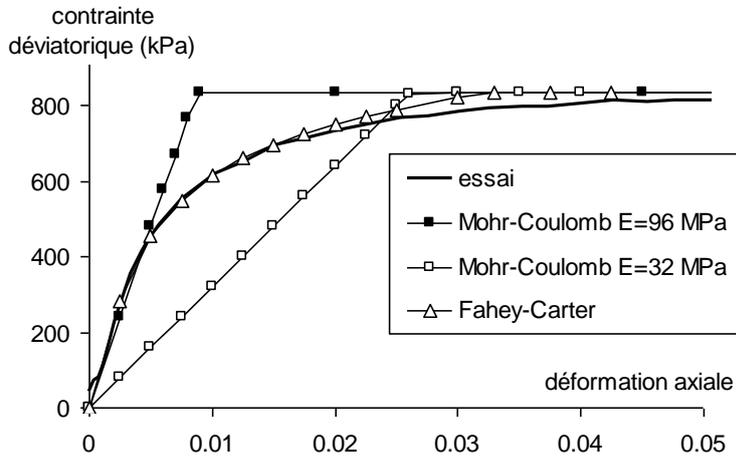
10000 2

ELAS 4 0.5 0.25 0.8 1.8 225 100. 1. 35.5

CRT 4 1. 35.5

POT 4 0. 8.5

Les résultats obtenus sont comparés aux mesures sur la figure suivante (triax_mc.data, triax_mc2.data et triax_fc.data).



La figure suivante montre les résultats obtenus avec la formulation simplifiée du modèle de Fahey et Carter.

Paramètres du modèle de Fahey et Carter modifié (IELAS=7) (triax_fc2.data)

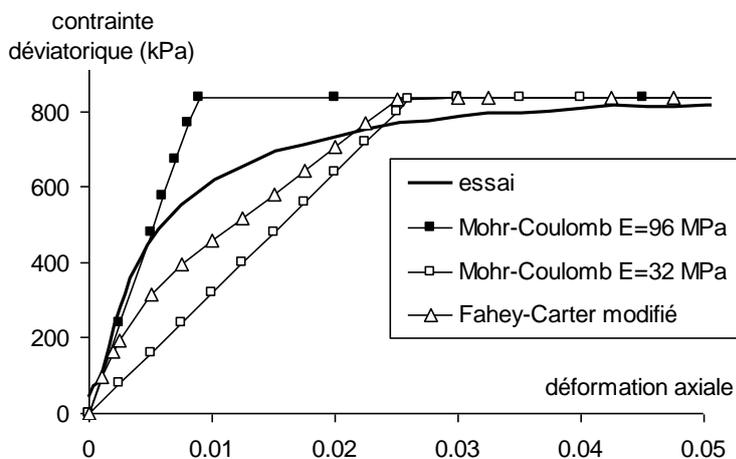
sable

10000 2

ELAS 7 38.4e3 300. 0.5 10.e3 250. 0.25

CRT 4 1. 35.5

POT 4 0 8.5



L'utilisation des modèles non linéaires améliore beaucoup l'accord entre les simulations et les essais.

Cependant, le modèle obtenu avec la loi élastique de Fahey et Carter (IELAS=4) et le critère de Mohr Coulomb présente plusieurs points faibles. En premier lieu, il fait intervenir un nombre important de paramètres dont l'identification à partir d'essais est difficile (cf Coquillay, 2005). D'autre part, le modèle est parfaitement plastique : le module est donc le même en chargement et en déchargement, et la déformation axiale pour laquelle on passe de la phase contractante élastique à la phase dilatante correspond à la valeur maximale du déviateur.

La version modifiée dépend d'un plus petit nombre de paramètres, et les modules ne dépendent pas des caractéristiques de résistance. Ce modèle permet de reproduire la raideur initiale et de caler la déformation axiale pour une valeur donnée du déviateur, mais pas de reproduire la forme de la courbe aussi bien qu'avec le modèle original.

13.4. Calcul en condition non drainée

La programmation des modèles à composantes permet de faire des calculs en condition non drainée. Le principe est de pénaliser, pour l'assemblage de la méthode de rigidité, la déformation volumique en prenant en compte la compressibilité du fluide interstitiel. Le traitement de la plasticité repose bien sur un calcul en contraintes effectives.

Il y a ici une particularité : les chargements appliqués sont donnés en contraintes totales. Les résultats de calcul sont en contraintes effectives (ce qui explique qu'on ne retrouve pas les contraintes qu'on applique sur certaines parties du contour).

L'analyse des résultats doit être faite avec précaution, parce que le traitement est fait groupe par groupe (on peut avoir des groupes peu perméables non drainés et des groupes perméables qui restent en condition drainée) : on peut donc avoir des discontinuités du vecteur-contrainte pour le champ de contraintes calculé.

On présente le résultat de la simulation d'un essai triaxial non drainé, avec le modèle Cam-Clay modifié. Les caractéristiques sont les suivantes :

pour la loi élastique (linéaire isotrope) : $E = 50 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$

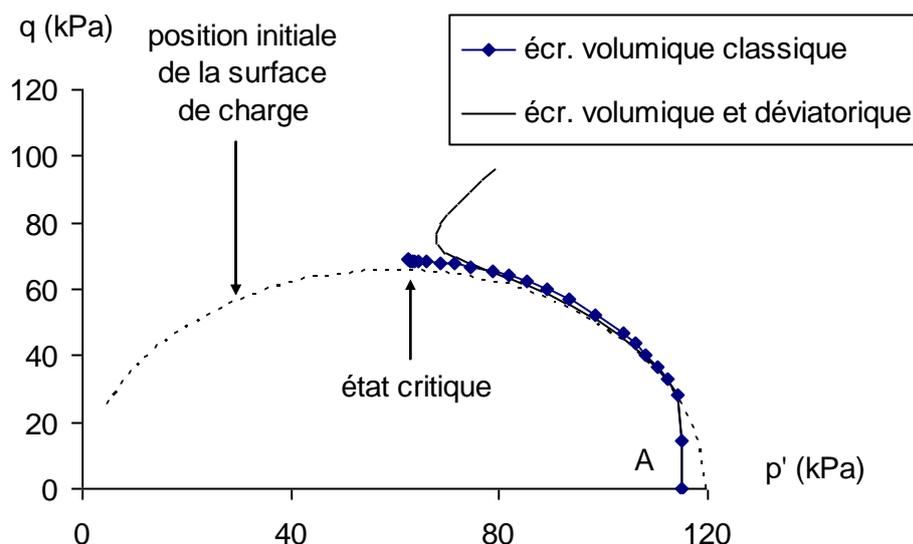
pour le critère : $M = 1,1$; $p_c^\circ = 120 \text{ kPa}$

pour la loi d'érouissage : $\lambda = 0,02$; $\kappa = 0,08$; $e_o = 0,9$

On part d'un état de contraintes isotrope $p' = 115 \text{ kPa}$, et on applique un déplacement vertical vers le bas sur la face supérieure du maillage. On fait le calcul en condition non drainée, en adoptant pour l'eau un module de compression égal à $2\,000 \text{ MPa}$ et pour la porosité la valeur $0,3$.

fichier : triax_ccm6.data

On représente sur la figure suivante le chemin de contraintes dans le plan (p',q) . On constate que l'état de contraintes, partant du point A, monte d'abord suivant une verticale : au cours du régime élastique, la variation de volume est négligeable et celle de p' l'est donc aussi. On atteint la surface de charge et le point remonte ensuite en suivant la surface de charge, jusqu'à la droite d'état critique : avec ce modèle, le matériau présente une limite de résistance clairement identifiée en condition non drainée. On notera que la taille du domaine élastique augmente un peu au cours du cisaillement, ce qui fait que l'on ne reste pas exactement sur la surface initiale.



A titre d'illustration, on a également représenté le chemin de contraintes obtenu si l'on prend en compte une composante déviatorique dans l'écroûissage (IECR=3), en modifiant les données matériau (fichier triax_ccm6b.data) :

Avec ce type d'écroûissage, et selon les valeurs des paramètres, on peut obtenir un chemin de contraintes différent sur le plan qualitatif, et une inversion du sens de variation de p' au cours du cisaillement. D'autre part, la contrainte déviatorique continue à augmenter : il n'y a plus nécessairement de limite à la résistance au cisaillement non drainé.

Notes :

- 1) Le modèle Egg Cam-Clay est une variante dans laquelle on peut modifier la forme du critère, d'une part, autoriser des contraintes de traction, d'autre part, et enfin, adopter une loi d'écroûissage volumique seulement dans la partie contractante du critère.
- 2) L'utilisation de calculs en condition non drainée pour l'évaluation du comportement à court terme des ouvrages demande des précautions particulières : si le choix du critère de plasticité n'est pas judicieux, le modèle peut conduire à une résistance au cisaillement à court terme infinie : c'est le cas en particulier si l'on utilise le modèle de Mohr-Coulomb. En régime plastique, le chemin de contrainte remonte indéfiniment le long de la droite de rupture. Il en résulte que ce type de modèle ne permet pas d'évaluer correctement la stabilité d'un ouvrage à court terme.

13.5. Critères de plasticité anisotropes

A compléter

13.6. Comportement cyclique : modèles d'érouissage cinématique non linéaire

Pour étudier l'accumulation de déformations plastiques lors de chargements répétés, on a introduit une loi d'érouissage cinématique non linéaire. La surface de charge est translatée dans l'espace des contraintes :

$$f(\underline{\sigma}) = F(\underline{\sigma} - \underline{X})$$

où \underline{X} est la variable d'érouissage et F une fonction classique : celle de von Mises pour le modèle ICRIT=25 et celle de Drucker-Prager pour ICRIT=27. L'accumulation de déformation est obtenue en introduisant une loi du type de celle proposée par Chaboche ou par Armstrong et Fredericks:

$$\dot{\underline{X}} = 2/3 C \dot{\underline{\varepsilon}}^p - D \underline{X} \dot{\xi}$$

où C est une contrainte de référence et D une grandeur sans dimension (avec $\dot{\xi} = (2/3 \dot{\underline{\varepsilon}}^p : \dot{\underline{\varepsilon}}^p)^{1/2}$). Pour la loi d'écoulement, on calcule le potentiel plastique pour la variable translatée:

$$g(\underline{\sigma}) = G(\underline{\sigma} - \underline{X})$$

avec

$$G(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} + \beta \operatorname{tr} \underline{\sigma}}$$

Il est possible d'intégrer analytiquement les équations du modèle pour un essai triaxial de compression monotone. Partant d'un état de contrainte supposé isotrope $\underline{\sigma}^0 = -\sigma_3 \underline{1}$, on maintient la contrainte de confinement σ_3 constante, et on augmente progressivement la (valeur absolue de la) contrainte verticale. On pose $\sigma_1 < \sigma_3 < 0$ et

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_3 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad ; \quad q = \sigma_3 - \sigma_1$$

$$\underline{X} = X_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + X_3 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad ; \quad X_3 = X_1 + x.$$

On montre que l'on peut relier le déviateur des contraintes à la déformation plastique axiale :

$$q = q^{el} + (q^{max} - q^{el}) [1 - \exp(-\gamma \varepsilon_1^p)]$$

où q^{el} est la limite élastique (la plus grande valeur de q pour laquelle on reste dans le domaine élastique) et q^{max} la valeur ultime du déviateur. On obtient :

$$q^{el} = \frac{k - 3\alpha\sigma_3}{1/\sqrt{3} - \alpha} \quad ; \quad q^{max} - q^{el} = \frac{C}{D} \frac{1 + 6\alpha\beta}{\sqrt{3(1 + 6\beta^2)}} \frac{1}{1/\sqrt{3} - \alpha} \quad ; \quad \gamma = \frac{D \sqrt{2\beta^2 + 1/3}}{1/\sqrt{3} - \beta}$$

On peut également établir que la déformation volumique plastique est reliée à la déformation plastique axiale par :

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + 2 \varepsilon_3^p = 3 \lambda \beta = \frac{3\beta}{\beta - 1/\sqrt{3}} \varepsilon_1^p$$

Ces relations permettent d'établir l'équation des courbes $q - \varepsilon_1$ et $\varepsilon_v - \varepsilon_1$:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p = -\frac{q}{E} - \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{q^{max} - q^{el}}{q^{max} - q} \right)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^p = -\frac{1-2\nu}{E} q + \frac{3\beta}{\gamma(1/\sqrt{3} - \beta)} \ln \left(\frac{q^{max} - q^{el}}{q^{max} - q} \right)$$

On observe en particulier que le changement de signe de la variation de volume se produit pour une valeur du déviateur q^{cr} strictement inférieure à q^{max} (ce qui constitue une amélioration par rapport au modèle élastique non-linéaire parfaitement plastique).

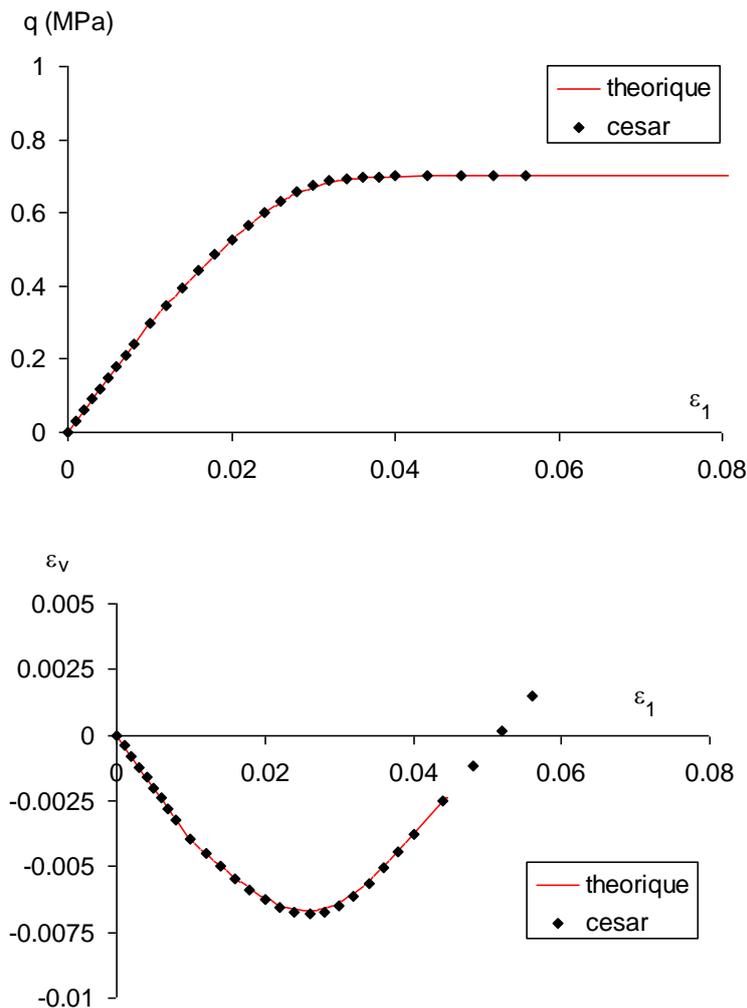
$$q^{cr} = q^{max} - \frac{3\beta E}{\gamma(1/\sqrt{3} - \beta)(1-2\nu)} = q^{max} - \frac{3\beta E}{(1-2\nu) D \sqrt{2\beta^2 + 1/3}}$$

Ces relations permettent de valider la programmation, au moins dans le cas monotone. Mestat (2010) a par ailleurs donné l'équation de la courbe $q-\varepsilon_1$ dans le cas d'une décharge à partir d'un niveau de chargement inférieur à q^{\max} .

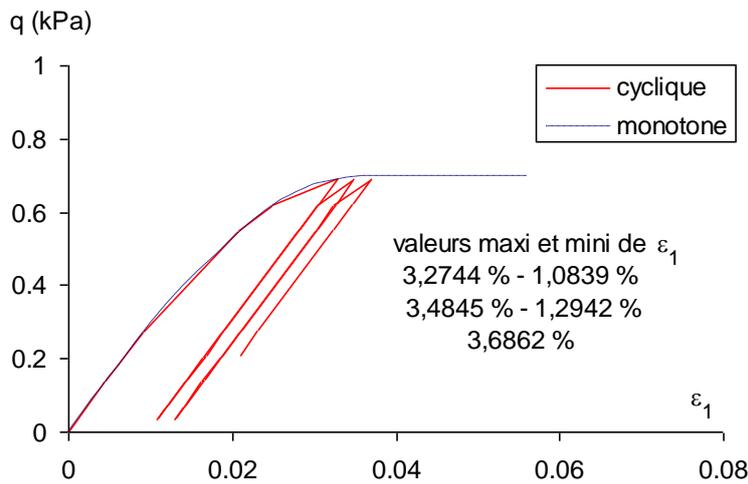
Les figures ci-dessous présentent les résultats obtenus numériquement pour $E=30\text{ MPa}$, $\nu=0.3$, $c=100\text{ kPa}$; $\varphi=25^\circ$; $\psi=10^\circ$; $C=90\text{ MPa}$; $D=300$.

On modélise un essai triaxial pour une contrainte initiale isotrope de 100 kPa , et on applique un déplacement imposé (3% de déformation verticale imposée en 30 incréments, puis 9 incréments supplémentaires de 0,1%).

La valeur ultime du déviateur est de $700,86\text{ kPa}$ suivant la formule ci-dessus : le calcul donne la même valeur. La figure ci-dessous montre la comparaison entre le calcul et les expressions analytiques, pour les deux courbes $q-\varepsilon_1$ et $\varepsilon_v-\varepsilon_1$.



On peut également représenter un essai cyclique, dans lequel le déviateur, initialement nul, est progressivement augmenté jusqu'à 690 kPa ; on effectue des cycles entre cette valeur et un déviateur de $34,5\text{ kPa}$, pour les mêmes valeurs des paramètres.



On observe une accumulation progressive de déformation plastique d'un cycle à l'autre.

13.7. Simulations avec deux mécanismes plastiques

13.7.1. Modèle avec « cap » en compression

Une façon de reproduire un chemin de contrainte du type de celui obtenu avec le modèle Cam-Clay et un écoulement déviatorique au cours d'un essai triaxial non drainé consiste à combiner deux mécanismes élastoplastiques indépendants. Une telle combinaison est possible avec les modèles à composantes, à condition de se limiter aux critères réguliers (ce qui exclut le critère de Mohr-Coulomb et celui de Hoek et Brown).

On peut par exemple envisager la combinaison d'un critère parabolique (sans écoulement) et d'un critère de type Cam-Clay, avec l'écoulement volumique habituel. Les paramètres élastiques et des deux mécanismes plastiques sont les suivants :

$$E = 100 \text{ MPa} ; \nu = 0,3$$

$$R_c = 23 \text{ kPa} ; R_t = 3 \text{ kPa}$$

$$M = 1 ; p_c^\circ = 150 \text{ kPa} ; e_o = 1,08, \lambda = 0,15 \text{ et } \kappa = 0,02.$$

On simule un essai triaxial, pour une contrainte initiale isotrope de 135 kPa. Les données sont les suivantes :

argile

10000 2

ELAS 0 30.e3 0.3

CRT 7 22.75 3.

CRT2 6 1. 150.

ECR2 1 .15 0.02 1.08

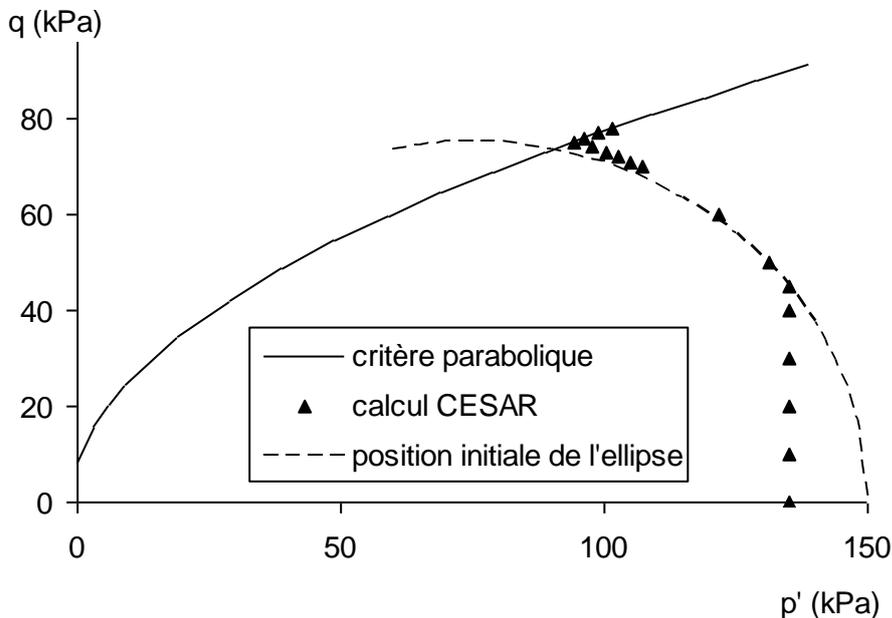
NDR

1000e3 .3

Le chemin de contrainte obtenu dans le plan (p', q) est représenté sur la figure suivante, par la succession des symboles triangulaires. Partant de l'état de contrainte initial isotrope, on commence par un chemin à p' constant ; lorsque l'état de contraintes atteint la surface de charge du modèle Cam-Clay (dont la position initiale est représentée en pointillés), on remonte sur cette surface, la contrainte moyenne diminue et le déviateur augmente.

Lorsque l'on atteint la deuxième surface (celle qui correspond au critère parabolique, représenté en trait plein), le sens de variation de la contrainte moyenne s'inverse.

Note : Le calcul est ici piloté en contrainte. La convergence lorsqu'on atteint la deuxième surface (le critère parabolique) est très lente (ici on a adopté une tolérance de 0,01 et fixé le nombre maximum d'itérations à 2000) ; il est ici plus simple de piloter le calcul en déplacement.



13.7.2. Modèle de massif rocheux fracturé

Une autre utilisation possible de la combinaison de deux mécanismes plastiques a été proposée par A. Pouya pour représenter le comportement d'un massif traversé par une famille de fractures. L'approche consiste à combiner un critère isotrope représentant les caractéristiques de rupture de la matrice rocheuse (par exemple le critère parabolique), et un critère anisotrope, comme le critère orienté, pour modéliser les déformations plastiques qui peuvent se produire par le jeu des fractures.

14. RÉFÉRENCES

- Assire A, Desroches X, Proix JM (2010) Code_Aster : Manuel de Référence, Fascicule R4.01 : Matériaux composites, document : R4.01.02 Elasticité anisotrope.
- Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.L., Forest S. (2001) Lois de comportement non linéaires des matériaux, Hermès-Lavoisier.
- Bigoni D., Piccolroaz A. (2003) A new yield function for géomaterials, Constitutive modelling and analysis of boundary value problems in geotechnical engineering, Viggiani (ed), Naples.
- Bottoni M (2009) Documentation de Code_Aster, clé R7.01.08 : Modèle d'endommagement de Mazars.
- Dal Pont S, Tailhan JL (2009) Etude bibliographique sur la modélisation de l'endommagement des bétons, rapport du projet ANR Applet L2-2/1, 68 pages.
- Davenne L, Souridis C, Piau JM (1989) Un code de calcul pour la prévision du comportement des structures endommageables en béton, en béton armé ou en béton de fibres, annales de l'ITBTP, n°478, série Béton 267.
- Desai C.S. (1980) A general basis for yield, failure and potential functions in plasticity, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 4, 361-375.
- DIANA-8.1 User's manual, Finite Element Analysis. Material Library
- Fayolle S (2008) Etude de la modélisation de la pose et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastiques : application au rivetage auto-poinçonneur, thèse de l'ENSMP.
- Giry C (2011) Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration dans les structures en béton armé, thèse de l'université de Grenoble.
- Hillerborg A, Modéer M, Petersson PE (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research, 6 : 773-782.
- Jirasek M (2002) Objective modeling of strain localization, revue française de génie civil, 6:1119-1132.
- Kazymyrenko K (2009) Modélisation non locale à gradient de déformation, documentation de Code_Aster, R5.04.02.pdf
- Kotronis P (2000) Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D, thèse ENS Cachan.
- Krayani A (2007) Contributions à la modélisation non linéaire du comportement mécanique du béton et des ouvrages en béton armé et précontraint, thèse de l'Ecole Centrale de Nantes et de l'Université de Nantes.
- La Borderie C. (2003) Stratégies et modèles de calcul pour les structures en béton, HdR univ Pau et Pays de l'Adour
- Lemaître J, Chaboche JL (1978) Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. Journal de mécanique appliquée, 2 :317-365.
- Lemaître J, Chaboche JL (1985) Mécanique des matériaux solides, Dunod.
- Lourenço PB, Milani G, Tralli A, Zucchini A (2007) Analysis of masonry structures : review of and recent trends in homogenization techniques, Can J Civ Eng 34:1443-1457.
- Menetrey Ph., Willam K.J. (1995) Triaxial failure criterion for concrete and its generalization, ACI Structural Journal, vol. 92, n°3, 311-318.
- Mestat Ph. (1993) Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis, ERLPC, série géotechnique GT52.
- Nedjar B 2001 Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage : formulation and computational aspects, Int J Solids Structures, 38, 5421,5451.
- Oliver J, Cervera M, Oller S, Lubliner J (1990) Isotropic Damage models and smeared crack analysis of concrete, 945-957. In: Proc 2nd ICCAADS, vol. 2, 945-958.

- Salençon J. (2007) Mécanique des milieux continus. Tome II. Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau ; Ellipses, Paris, (2007)
- Shao C., Desai C.S. (2000) Implementation of DSC model and application for analysis of field pile tests under cyclic loading, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 24, 601-624.
- Wheeler S.J., Näätänen A., Karstunen M., Lojander M. (2003) An anisotropic elastoplastic model for soft clays, *Can. Geotech. J.* 40, 403-418.
- Zucchini A, Lourenço PB (2002) A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry, *Int J Solids and Structures* 39 : 3233-3255.

15. ANNEXES

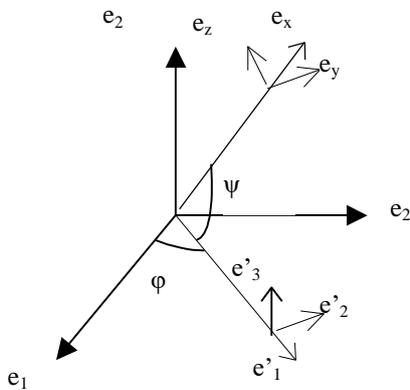
15.1. Critères de plasticité anisotropes : orientation des axes liés au matériau

Un matériau anisotrope présente des propriétés différentes selon les directions de l'espace. Il est nécessaire de repérer l'orientation du matériau par rapport à celle du repère de travail. On note (e_1, e_2, e_3) le repère dans lequel est défini le maillage qu'on utilise et (e_x, e_y, e_z) le repère définissant les directions d'orthotropie du matériau.

Cas particulier des modèles « isotropes transverses » ou « orthotropes de révolution ».

Dans ce cas, les propriétés du matériau présentent une symétrie de révolution autour d'un axe particulier, dont la direction dépend de deux angles en 3D.

On définit l'orientation du repère local à l'aide de deux angles de la manière suivante : ce changement de repère est familier aux utilisateurs de MAX3D pour la définition de conditions aux limites.



La base locale (e_x, e_y, e_z) est l'image de la base (e_1, e_2, e_3) par la composée des deux rotations d'angle φ et ψ . On a :

$$\underline{e}'_1 = \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2 ; \quad \underline{e}'_2 = -\sin \varphi \underline{e}_1 + \cos \varphi \underline{e}_2 ; \quad \underline{e}'_3 = \underline{e}_3$$

et

$$\underline{e}_x = \cos \psi \underline{e}'_1 + \sin \psi \underline{e}'_3 ; \quad \underline{e}_y = \underline{e}'_2 ; \quad \underline{e}_z = -\sin \psi \underline{e}'_1 + \cos \psi \underline{e}'_3$$

Il vient alors:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} \text{ avec } R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \underline{e}_x \\ \underline{e}_y \\ \underline{e}_z \end{bmatrix}, \text{ avec } T = R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\sin \varphi & -\cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

NB : $R^{-1} = {}^tR$ car R est la matrice d'une rotation.

Prise en compte de l'orientation du matériau dans le cas général (ICRIT=22, 23, 28, 29)

Dans le cas le plus général, il n'y a pas de « plan d'isotropie » : il ne suffit pas de repérer la direction d'un axe matériel particulier, mais il faut définir l'orientation d'un repère par rapport à un autre, ce qui nécessite trois angles au lieu de deux. Un des procédés classiques pour décrire un changement de repère en mécanique consiste à utiliser les angles d'Euler. Le passage du repère initial au repère final se fait en composant trois rotations :

- une rotation d'axe e_3 et d'angle Ψ fait passer de (e_1, e_2, e_3) à (u, v, e_3)
- une rotation d'axe u et d'angle Θ fait passer de (u, v, e_3) à (u, w, e_2)
- une rotation d'axe e_2 et d'angle Φ fait passer de (u, w, e_2) à (e_x, e_y, e_z)

L'angle Ψ porte le nom d'angle de précession, Θ est l'angle de nutation, et Φ l'angle de rotation propre.

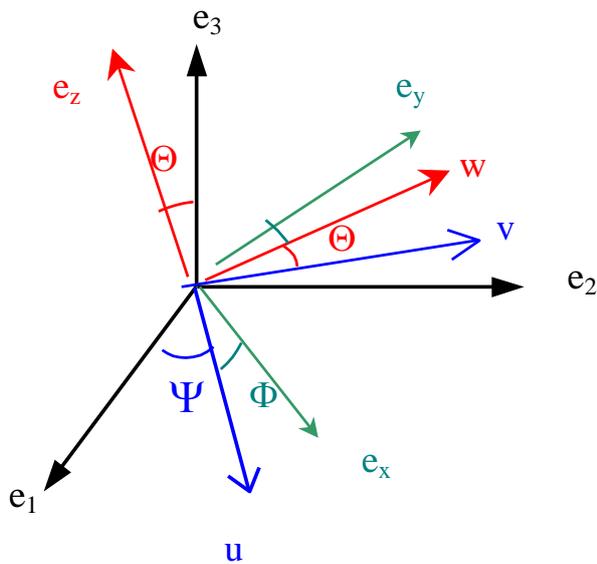


Figure 5 – Angles d'Euler

Le critère porte sur les composantes du tenseur des contraintes dans le repère local (e_x, e_y, e_z) . Il s'agit donc d'écrire les composantes des vecteurs du repère global (e_1, e_2, e_3) dans la base des vecteurs du repère local (e_x, e_y, e_z) . On détaille ici les calculs du changement de base :

$$u = \cos \Psi e_1 + \sin \Psi e_2$$

$$v = -\sin \Psi e_1 + \cos \Psi e_2$$

puis

$$w = \cos \Theta v + \sin \Theta e_3 = -\cos \Theta \sin \Psi e_1 + \cos \Theta \cos \Psi e_2 + \sin \Theta e_3$$

$$e_z = -\sin \Theta v + \cos \Theta e_3 = \sin \Theta \sin \Psi e_1 - \sin \Theta \cos \Psi e_2 + \cos \Theta e_3$$

et la troisième rotation donne

$$e_x = \cos \Phi u + \sin \Phi w$$

$$e_y = -\sin \Phi u + \cos \Phi w$$

$$\text{D'où finalement : } \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Psi - \sin \Phi \cos \Theta \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Psi + \sin \Phi \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Theta \sin \Phi \\ -\sin \Phi \cos \Psi - \cos \Phi \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Phi \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Theta \cos \Phi \\ \sin \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

On en déduit:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}, \text{ avec } T = R^{-1} = {}^t R \text{ car } R \text{ est la matrice d'une rotation.}$$

Il est intéressant de noter que le changement d'orientation simplifié de la section précédente est un cas particulier du changement général défini par les angles d'Euler. Il correspond à :

$$\Psi = \varphi - \pi/2 ; \quad \Theta = \psi ; \quad \Phi = \pi/2$$

Expression du tenseur des contraintes dans la base (e_x, e_y, e_z)

Il reste à calculer les composantes du tenseur des contraintes dans la base liée au matériau $(e_k)_{k=x,y,z}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ + \sigma_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{23} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_{13} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)$$

Il faut décomposer $e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_3 \otimes e_3, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_3, e_1 \otimes e_3$ dans la base (e_x, e_y, e_z) .

$$e_1 \otimes e_1 = T_{1k} e_k \otimes T_{1l} e_l = T_{1k} T_{1l} e_k \otimes e_l$$

La matrice de $e_1 \otimes e_1$ dans la base (e_x, e_y, e_z) a pour terme général $(T_{1k} T_{1l})_{k,l=x,y,z}$

De même :

$$e_2 \otimes e_2 = (T_{2k} T_{2l} e_k \otimes e_l)_{k,l=x,y,z} \qquad e_3 \otimes e_3 = (T_{3k} T_{3l} e_k \otimes e_l)_{k,l=x,y,z}$$

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = (T_{1k} T_{2l} e_k \otimes e_l + T_{1l} T_{2k} e_k \otimes e_l)_{k,l=x,y,z}$$

$$e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 = (T_{2k} T_{3l} e_k \otimes e_l + T_{2l} T_{3k} e_k \otimes e_l)_{k,l=x,y,z}$$

$$e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 = (T_{1k} T_{3l} e_k \otimes e_l + T_{1l} T_{3k} e_k \otimes e_l)_{k,l=x,y,z}$$

$$\text{d'où } \sigma = \sigma_{11} (T_{1k} T_{1l} e_k \otimes e_l)_{k,l} + \sigma_{22} (T_{2k} T_{2l} e_k \otimes e_l)_{k,l} + \sigma_{33} (T_{3k} T_{3l} e_k \otimes e_l)_{k,l} + \\ \sigma_{12} (T_{1k} T_{2l} e_k \otimes e_l + T_{1l} T_{2k} e_k \otimes e_l)_{k,l} + \sigma_{23} (T_{2k} T_{3l} e_k \otimes e_l + T_{2l} T_{3k} e_k \otimes e_l)_{k,l} + \\ \sigma_{13} (T_{1k} T_{3l} e_k \otimes e_l + T_{1l} T_{3k} e_k \otimes e_l)_{k,l}$$

En notant $[\sigma]$ le vecteur des composantes du tenseur des contraintes dans le repère local, et $[\Sigma]$ le vecteur des composantes dans le repère global, et Q la matrice ci-dessus :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} ; \quad [\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} ;$$

on trouve, en identifiant les termes de l'expression précédente :

$$[\sigma] = Q [\Sigma]$$

avec

$$Q = \begin{bmatrix} T_{11} T_{11} & T_{21} T_{21} & T_{31} T_{31} & 2 T_{11} T_{21} & 2 T_{21} T_{31} & 2 T_{11} T_{31} \\ T_{12} T_{12} & T_{22} T_{22} & T_{32} T_{32} & 2 T_{12} T_{22} & 2 T_{22} T_{32} & 2 T_{12} T_{32} \\ T_{13} T_{13} & T_{23} T_{23} & T_{33} T_{33} & 2 T_{13} T_{23} & 2 T_{23} T_{33} & 2 T_{13} T_{33} \\ T_{12} T_{11} & T_{21} T_{22} & T_{31} T_{32} & T_{11} T_{22} + T_{12} T_{21} & T_{21} T_{32} + T_{22} T_{31} & T_{11} T_{32} + T_{12} T_{31} \\ T_{31} T_{12} & T_{23} T_{22} & T_{32} T_{33} & T_{12} T_{23} + T_{13} T_{22} & T_{22} T_{33} + T_{23} T_{32} & T_{12} T_{33} + T_{13} T_{32} \\ T_{13} T_{11} & T_{23} T_{21} & T_{31} T_{33} & T_{11} T_{23} + T_{13} T_{21} & T_{21} T_{33} + T_{23} T_{31} & T_{11} T_{33} + T_{13} T_{31} \end{bmatrix}$$

Calcul des dérivées partielles du critère

Le critère s'écrit :

$$f(\sigma) = \frac{3}{2} {}^t[\sigma] P [\sigma] - \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} {}^t[\Sigma] {}^tQ P Q [\Sigma] - \bar{\sigma}^2$$

Il est facile de voir que la différentielle de f s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \Sigma} d\Sigma = \frac{3}{2} \{ {}^t[d\Sigma] \cdot {}^tQPQ \cdot [\Sigma] + {}^t[\Sigma] \cdot {}^tQPQ \cdot [d\Sigma] \} = \frac{3}{2} \{ {}^t[\Sigma] \cdot {}^tQ {}^tPQ \cdot [d\Sigma] + {}^t[\Sigma] \cdot {}^tQPQ \cdot [d\Sigma] \}$$

D'où, en tenant compte du fait que P est symétrique :

$$df = \frac{3}{2} \{ 2 {}^t[\Sigma] \cdot {}^tQPQ \cdot [d\Sigma] \}$$

$$\text{On en déduit } \frac{\partial f}{\partial \Sigma} = 3 {}^t[\Sigma] \cdot {}^tQPQ = 3 {}^tQPQ [\Sigma]$$

ou encore, en fonction des composantes dans le repère local :

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma} = 3 {}^t[\sigma] P Q = 3 {}^tQ P [\sigma]$$

15.2. Modèle élastoplastique anisotrope à deux types d'érouissage : S-CLAY1

Ce modèle de comportement a été développé pour les argiles naturelles, par Wheeler et al (2003). Il s'agit d'un modèle élastoplastique défini par un critère anisotrope. La construction part de constatations expérimentales dans le contexte de l'essai triaxial, puis propose une extension au cas tridimensionnel le plus général.

Dans le contexte de l'essai triaxial, le modèle S-CLAY 1 définit la surface de charge par :

$$f = (q - \alpha p)^2 - (M^2 - \alpha^2) (p_m - p) p = 0$$

où p et q sont définis par : $q = \sigma_v - \sigma_h$ et $p = (\sigma_v + 2 \sigma_h)/3$. Ce ne sont donc pas les invariants classiques : ils sont définis par rapport à des directions particulières de l'espace.

Figure 6 – Forme de la surface de charge du modèle S-CLAY1 pour $\alpha = 0,4$; $p_m = 2,5$; $M=1$

Il est important de souligner que l'on ne peut pas représenter correctement l'anisotropie des propriétés plastiques si l'on formule le critère en identifiant p et q aux invariants classiques, puisque l'on perd l'information sur l'orientation des directions principales du tenseur de contraintes. Dans le cadre tridimensionnel général, Wheeler et al (2003) proposent la formulation suivante :

$$f = 3/2 (\underline{s} - p \underline{a}^*) : (\underline{s} - p \underline{a}^*) - (M^2 - 3/2 \underline{a}^* : \underline{a}^*) (p_m - p) p$$

où \underline{s} est le déviateur de $\underline{\sigma}$ et \underline{a}^* un tenseur déviatorique qui joue le rôle de variable d'érouissage. Ce modèle comporte deux paramètres d'érouissage \underline{a}^* tensorielle et p_m scalaire.

Le paramètre p_m contrôle la taille de la surface de charge et \underline{a}^* son orientation dans l'espace des contraintes.

Pour le paramètre p_m , Wheeler et al (2003) proposent une loi traditionnelle :

$$p_m = p_m^0 \exp \left(- \frac{(1+e_0)\varepsilon_v^p}{\lambda - \kappa} \right)$$

où e_0 est l'indice des vides, λ et κ les pentes du diagramme $e - \ln p$ (pour un essai de compression isotrope).

Dérivées du critère

$$\text{On a } f = 3/2 (\underline{s} - p \underline{a}^*) : (\underline{s} - p \underline{a}^*) - (M^2 - 3/2 \underline{a}^* : \underline{a}^*) (p_m - p) p$$

En développant, il vient

$$f = 3/2 \underline{s} : \underline{s} - 3 p \underline{a}^* : \underline{s} - M^2 p (p_m - p) + 3/2 \underline{a}^* : \underline{a}^* p p_m$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = 3 \underline{s} - 3 p \underline{a}^* + (\underline{a}^* : \underline{s}) \underline{1} + M^2 (p_m - 2p)/3 \underline{1} - 1/2 \underline{a}^* : \underline{a}^* p_m \underline{1}$$

Le calcul du module d'érouissage H nécessite de connaître les dérivées de f par rapport à \underline{a}^* et à p_m .

$$\text{On a } H d\lambda = - \frac{\partial f}{\partial \underline{a}^*} : d\underline{a}^* - \frac{\partial f}{\partial p_m} : dp_m$$

$$\text{avec } \frac{\partial f}{\partial \underline{a}^*} = 3 p (p_m \underline{a}^* - \underline{s})$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_m} = - (M^2 - 3/2 \underline{a}^* : \underline{a}^*) p$$

Les auteurs proposent de prendre :

$$d\mathbf{a}^* = \mu [\{ \chi_v - \mathbf{a}^* \} \langle d\varepsilon_v^p \rangle + \beta \{ \chi_d - \mathbf{a}^* \} d\varepsilon_d^p]$$

avec

$$\chi_v = \frac{3 \underline{s}}{4 p} ; \chi_d = \frac{\underline{s}}{3 p} ; \langle d\varepsilon_v^p \rangle = d\varepsilon_v^p \text{ si } d\varepsilon_v^p < 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

Initialisation de la variable d'écroissage a^*

Dans le contexte des variables triaxiales, pour un matériau formé par dépôt sédimentaire et normalement consolidé, Wheeler et al proposent de prendre :

$$\alpha^o = \frac{\eta_{K_o}^2 + 3\eta_{K_o} - M^2}{3} ; \text{ avec } \eta_{K_o} = \frac{3(1 - K_o)}{1 + 2 K_o}$$

Pour le paramètre scalaire β , ils proposent la valeur particulière :

$$\beta = \frac{3 (4 M^2 - 4 \eta_{K_o}^2 - 3\eta_{K_o})}{8 (\eta_{K_o}^2 + 2\eta_{K_o} - M^2)}$$

Aucune valeur n'est imposée pour le paramètre μ .

La formulation tridimensionnelle a été programmée dans CESAR-LCPC. Les paramètres β et μ étant scalaires, on peut conserver les valeurs précédemment définies.

En revanche, il est nécessaire de préciser la valeur initiale du tenseur \mathbf{a}^* .

On admet que l'état de contraintes initial est géostatique, défini par :

$$\underline{\sigma} = -\sigma_h (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) - \sigma_v \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = -\sigma_v [\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + K_o (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y)]$$

Le déviateur des contraintes est alors donné par :

$$\underline{s} = -2 \sigma_v (1-K_o)/3 [\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z - 1/2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y)]$$

On cherche le tenseur déviatorique \mathbf{a}^* sous la forme :

$$\mathbf{a}^* = a [\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z - 1/2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y)]$$

En admettant que l'état actuel résulte d'une situation de dépôt sédimentaire, dans laquelle les déformations horizontales sont nulles, et que les déformations plastiques le sont aussi, on a :

$$d\varepsilon_{xx}^p = 0$$

ce qui donne, compte tenu de la loi d'écoulement, et de l'expression des dérivées du critère :

$$3 s_{xx} - 3 p (-a/2) + (\mathbf{a}^* : \underline{s}) + M^2 (p_m - 2p)/3 - 1/2 \mathbf{a}^* : \mathbf{a}^* p_m = 0$$

ou encore :

$$\sigma_v (1-K_o) + 3 p a/2 - a \sigma_v (1-K_o) + M^2 (p_m - 2p)/3 - 1/2 (3/2 a^2) p_m = 0$$

On suppose enfin que l'état de contraintes est sur la surface de charge

$$f = 0 \Rightarrow p_m = p + \frac{3/2 (\underline{s} - p \mathbf{a}^*) : (\underline{s} - p \mathbf{a}^*)}{p (M^2 - 3/2 \mathbf{a}^* : \mathbf{a}^*)} = p + \frac{3/2 \underline{s} : \underline{s} - 3 p \mathbf{a}^* : \underline{s} + 3/2 p^2 \mathbf{a}^* : \mathbf{a}^*}{p (M^2 - 3/2 \mathbf{a}^* : \mathbf{a}^*)}$$

$$p_m = p + \frac{[\sigma_v (1-K_o)]^2 + 3 p a \sigma_v (1-K_o) + 9/4 p^2 a^2}{p (M^2 - 9/4 a^2)}$$

En tenant compte de la valeur de $p = -1/3 \text{ tr } \underline{\sigma} = \sigma_v (1+2K_o)/3$, et moyennant l'introduction du rapport des

contraintes $\eta = q/p = \frac{\sigma_v (1-K_o)}{\sigma_v (1+2K_o)/3} = \frac{3(1-K_o)}{(1+2K_o)}$, on trouve :

$$a = 2(M^2 - \eta^2)/9 - 2\eta/3$$

ce qui fournit un procédé permettant de calculer la valeur initiale du paramètre \underline{a}^* , au moins pour une argile normalement consolidée.

Le calcul de χ_v et χ_d pose problème lorsque p tend vers zéro. On les exprimera d'une autre façon, par exemple :

$$\chi_v = \frac{3 \underline{s}}{4 \text{Max}(p, p_0)} ; \chi_d = \frac{\underline{s}}{3 \text{Max}(p, p_0)}$$

15.3. Critère de Von Mises et écoulement cinématique non linéaire de Prager

Dans le cadre de l'étude du comportement cyclique d'un pieu, on s'est intéressé aux modèles permettant de décrire une accumulation progressive de déformations plastiques. Le modèle le plus simple que l'on ait trouvé dans la littérature est une loi d'écoulement cinématique non linéaire, appelée modèle de Prager. La présentation succincte qui suit reprend largement les principes exposés dans Besson et al (2001).

On utilise un critère du type :

$$F(\underline{\sigma}, \underline{X}) = f(\underline{\sigma} - \underline{X}) \leq 0$$

où $\underline{X} = C \underline{\dot{\epsilon}}^p$ et f le critère de von Mises $f(\sigma) = \frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} - k^2$ avec \underline{s} le déviateur de $\underline{\sigma}$.

La loi d'écoulement est donnée sous la forme :

$$\dot{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\dot{\epsilon}}^p - D X \dot{p}$$

avec :

$$\dot{p} = (2/3 \underline{\dot{\epsilon}}^p : \underline{\dot{\epsilon}}^p)^{1/2}, \text{ où } C \text{ et } D \text{ sont des scalaires.}$$

Remarque : on peut choisir un critère de plasticité différent du critère de von Mises, par exemple le critère de Drucker Prager. On a aussi testé l'écoulement de Prager avec le critère de Drucker Prager.

Dérivées partielles du critère

On a

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}, \underline{X}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma} - \underline{X})$$

La dérivée du critère F par rapport à $\underline{\sigma}$ est la même que celle de f (von Mises ou Drucker Prager) : les calculs sont donc déjà programmés dans CESAR-LCPC. Aucune modification n'a été faite dans le calcul du critère et de ses dérivées.

15.4. Critères dépendant du troisième invariant du tenseur des contraintes

15.4.1. Définition des invariants et calcul de leurs dérivées

En pratique, on utilise les dérivées du critère par rapport au tenseur des contraintes ; la difficulté consiste donc ici à savoir calculer les dérivées du troisième invariant d'un tenseur par rapport à ce tenseur. On définit les invariants de la manière suivante :

$$I_1 = \text{tr } \sigma ; \quad J_2 = 1/2 \text{ tr } (s^2) = 1/2 s : s ; \quad J_3 = 1/3 \text{ tr } (s^3)$$

$$\rho = \sqrt{2 J_2} ; \quad q = \sqrt{3/2 J_2} ; \quad \cos(3\theta) = 3 \sqrt{3} J_3 / (2 J_2^{3/2})$$

Bigoni et Piccolroaz donnent alors les expressions des dérivées des invariants :

$$\partial I_1 / \partial \sigma = 1 ; \quad \partial J_2 / \partial \sigma = s ; \quad \partial J_3 / \partial \sigma = s^2 - 1/3 \text{ tr } s^2 \mathbf{1}$$

$$\partial \rho / \partial J_2 = 1/\rho ; \quad \partial \theta / \partial \sigma = -9 [s^2 - \text{tr}(s^2)/3 \mathbf{1} - q/3 \cos(3\theta) s] / [2 q^3 \sin(3\theta)]$$

ce qui permet de calculer les dérivées de critères dépendant du troisième invariant.

15.4.2. Critère du modèle HISS

Le modèle HISS (pour Hierarchical Incremental Single Surface) est un modèle élastoplastique pour les géomatériaux, tiré des travaux de Desai (voir par exemple Shao et Desai (2000)). Il présente l'avantage de reposer sur une seule surface de charge régulière, mais de prendre en compte à la fois des déformations plastiques déviatoriques et volumiques, et de distinguer le cisaillement en compression et en extension.

L'expression du critère retenue ici parmi les différentes variantes est la suivante :

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{J_{2D}}{p_a^2} - \frac{-\alpha (J_1^*/p_a)^n + \gamma (J_1^*/p_a)^2}{\sqrt{1 - \beta S}}$$

$$\text{avec } n > 2 \text{ et } S = \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} ; \quad J_1^* = J_1 + 3R$$

Dans ces expressions, J_1 est le premier invariant du tenseur des contraintes, et J_{2D} et J_{3D} les deuxième et troisième invariants du déviateur des contraintes. Les formules définissant les invariants sont données par Desai (1980) :

$$J_1 = \text{tr } \underline{\sigma} ; \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} ; \quad J_3 = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}^3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

$\gamma, \beta, n, R, \alpha_0$ et p_a sont des paramètres définis par l'utilisateur.

Dérivées partielles du critère :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \underline{\sigma}}$$

avec

$$\frac{\partial J_1}{\partial \underline{\sigma}} = -\underline{\mathbf{1}} ; \quad \frac{\partial J_{2D}}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{s} ; \quad \frac{\partial J_{3D}}{\partial \underline{\sigma}} = -(\underline{s}^2 - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{s}^2 \mathbf{1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_1} = - \frac{-\alpha n (J_1^*/p_a)^{n-1} + 2\gamma J_1^*/p_a}{p_a \sqrt{1 - \beta S}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{p_a^2} - \frac{\beta K}{2(1 - \beta S)^{3/2}} \frac{\partial S}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{p_a^2} + \frac{3}{2} \frac{\beta K}{2(1 - \beta S)^{3/2}} \frac{S}{J_{2D}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{3D}} = - \frac{\beta K}{2(1 - \beta S)^{3/2}} \frac{\partial S}{\partial J_{3D}} = - \frac{\beta K}{2(1 - \beta S)^{3/2}} \frac{\sqrt{27}}{2 J_{2D}^{3/2}}$$

où l'on a posé

$$K = -\alpha (J_1^*/p_a)^n + \gamma (J_1^*/p_a)^2$$

Le calcul des dérivées partielles pose problème lorsque l'état de contraintes $\underline{\sigma}$ est isotrope car on divise par des quantités nulles (J_{2D}). Le code a été modifié de la façon suivante :

$$\text{Si } J_{2D} = 0, \text{ alors } \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{\partial f}{\partial J_{3D}} = 0$$

De même l'expression de $\frac{\partial f}{\partial J_1}$ fait intervenir $(J_1)^n$ avec n réel. Si J_1 est nul, on impose aussi à $\frac{\partial f}{\partial J_{1D}}$ d'être nulle.

15.5. Note sur la programmation des modèles à élasticité anisotrope

On s'intéresse au traitement d'une élasticité orthotrope. L'axe d'orthotropie est l'axe 2. Le comportement s'écrit, dans le repère local :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_1/E_1 & -\nu_2/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1/E_1 & 1/E_1 & -\nu_2/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_2/E_2 & -\nu_2/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu_1)/E_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

qui s'inverse pour donner :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cE_1 \frac{[1-\nu_2^2 E_1/E_2]}{[1+\nu_1]} & cE_1 \frac{[\nu_1+\nu_2^2 E_1/E_2]}{[1+\nu_1]} & cE_1 \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ cE_1 \frac{[\nu_1+\nu_2^2 E_1/E_2]}{[1+\nu_1]} & cE_1 \frac{[1-\nu_2^2 E_1/E_2]}{[1+\nu_1]} & cE_1 \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ cE_1 \nu_2 & cE_1 \nu_2 & cE_2 (1-\nu_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } c = 1 - \nu_1 - 2\nu_2^2 E_1 / E_2$$

15.5.1. Calcul en déformations planes

Dans le cas des déformations planes, on a : $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ et il reste :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = M_L \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{avec } M_L = \begin{bmatrix} cE_1 \frac{[1-\nu_2^2 E_1/E_2]}{[1+\nu_1]} & cE_1 \nu_2 & 0 \\ cE_1 \nu_2 & cE_2 (1-\nu_1) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

On veut faire le calcul dans les axes d'un repère cartésien ($\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$). L'axe d'orthotropie (i.e. l'axe 2 du repère local), fait l'angle $\alpha + \pi/2$ avec l'horizontale :

$$\underline{e}_1 = \cos \alpha \underline{e}_x + \sin \alpha \underline{e}_y \quad ; \quad \underline{e}_3 = \underline{e}_z \quad \underline{e}_2 = -\sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{e}_y$$

On en tire en particulier les produits tensoriels suivants :

$$\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \cos^2 \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sin \alpha \cos \alpha (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \sin^2 \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 = -\sin \alpha \cos \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sin^2 \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \cos^2 \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \sin \alpha \cos \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 = -\sin \alpha \cos \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \cos^2 \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y - \sin^2 \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \sin \alpha \cos \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 = \sin^2 \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \sin \alpha \cos \alpha (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \cos^2 \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y$$

On peut donc exprimer les composantes du tenseur de déformation ou du tenseur de contraintes dans les axes du repère global ($\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$) en fonction de leurs composantes dans le repère local ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$)

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \varepsilon_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$$

$$\underline{\sigma} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$$

On trouve :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = T(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = P(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} =$$

avec :

$$T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

et

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Pour le calcul de la matrice de rigidité, l'énergie est donnée, en termes matriciels, par

$$W = \frac{1}{2} \sigma_L \varepsilon_L$$

où σ_L et ε_L sont les vecteurs des composantes des contraintes et des déformations dans la base locale. On a donc :

$$\sigma_L = M_L \cdot \varepsilon_L$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_L \cdot \varepsilon_L = \frac{1}{2} \varepsilon_L \cdot M_L \cdot \varepsilon_L$$

Pour passer au repère global, on introduit la matrice T et on trouve :

$$\varepsilon_L = T(-\alpha) \cdot \varepsilon_G$$

$$W = \frac{1}{2} t_{\varepsilon_G} \cdot t_{T(-\alpha)} \cdot M_L T(-\alpha) \cdot \varepsilon_G$$

Pour le calcul des contraintes, on a :

$$\sigma_G = P(\alpha) \cdot \sigma_L = P(\alpha) \cdot M_L \cdot \varepsilon_L = P(\alpha) \cdot M_L \cdot T(-\alpha) \cdot \varepsilon_G$$

NB : il est facile de voir que $t_{T(-\alpha)} = P(\alpha)$.

On a également besoin de la contrainte $\sigma_{zz} = \sigma_{33} = cE_1 \frac{[v_1 + v_2^2 E_1 / E_2]}{[1 + v_1]} \varepsilon_{11} + cE_1 v_2 \varepsilon_{22}$

avec

$$\varepsilon_{11} = \cos^2 \alpha \varepsilon_{xx} + \sin^2 \alpha \varepsilon_{yy} + \sin \alpha \cos \alpha 2 \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{22} = \sin^2 \alpha \varepsilon_{xx} + \cos^2 \alpha \varepsilon_{yy} - \sin \alpha \cos \alpha 2 \varepsilon_{xy}$$

NB : Pour le traitement de la plasticité on repasse en 3D.

15.5.2. Calcul en condition tridimensionnelle

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -v_2/E_2 & -v_1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_2/E_2 & 1/E_2 & -v_2/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1/E_1 & -v_2/E_2 & 1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+v_1)/E_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cE_1 \frac{[1-v_2^2 E_1 / E_2]}{[1+v_1]} & cE_1 v_2 & cE_1 \frac{[v_1 + v_2^2 E_1 / E_2]}{[1+v_1]} & 0 & 0 & 0 \\ cE_1 v_2 & cE_2 (1-v_1) & cE_1 v_2 & 0 & 0 & 0 \\ cE_1 \frac{[v_1 + v_2^2 E_1 / E_2]}{[1+v_1]} & cE_1 v_2 & cE_1 \frac{[1-v_2^2 E_1 / E_2]}{[1+v_1]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1}{2[1+v_1]} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

Il faut à nouveau revenir au repère global : on trouve comme précédemment

$$\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 = \cos \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \sin \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_z$$

$$\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 = -\sin \alpha \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \cos \alpha \underline{e}_y \otimes \underline{e}_z$$

$$\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 = \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

On en tire les formules de passage :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = T_3(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = P_3(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}$$

avec

$$T_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0 & -\sin\alpha \cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 0 & \sin\alpha \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sin\alpha \cos\alpha & -2\sin\alpha \cos\alpha & 0 & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$P_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0 & -2\sin\alpha \cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 0 & 2\sin\alpha \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha \sin\alpha & -\sin\alpha \cos\alpha & 0 & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

15.6. Formulation des lois d'érouissage pour les géomatériaux

De nombreux modèles de comportement ont été construits à partir de résultats d'essais à l'appareil triaxial, dans un contexte très particulier où les directions principales des tenseurs de contraintes et de déformation sont identiques, et fixes dans l'espace. L'extension au cas tridimensionnel de la formulation établie dans un cadre particulier pose différentes difficultés. L'une d'elles est le choix des variables à utiliser pour prendre en compte une contribution des déformations déviatoriques dans la loi d'érouissage.

15.6.1. Formulation en variables triaxiales

De nombreux modèles font l'hypothèse que le critère de plasticité est une fonction de la contrainte moyenne p et du déviateur q , définis par :

$$p = -\frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \quad , \quad q = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{1/2}$$

Au cours d'un essai triaxial de révolution, deux des contraintes principales sont égales (les deux contraintes horizontales), et les contraintes et les déformations (plastiques ou élastiques) ont des directions fixes. Si l'on note 1 la direction verticale, les tenseurs ont donc la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \sigma_3 (\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \varepsilon_3 (\underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3)$$

On suppose de plus que l'on s'intéresse à un essai triaxial de compression : $\sigma_1 < \sigma_3 < 0$. Dans ce contexte, on a :

$$p = -(\sigma_1 + 2 \sigma_3)/3$$

$$q = -(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Il est facile de voir que la dissipation plastique intrinsèque $\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p$ a pour expression :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1^p + 2 \sigma_3 \dot{\varepsilon}_3^p = p \dot{\varepsilon}_v^p + q \dot{\varepsilon}_d^p \quad (1)$$

où ε_v^p et ε_d^p désignent les parties volumique et déviatorique de la déformation plastique :

$$\varepsilon_v^p = -(\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_3)$$

$$\varepsilon_d^p = -\frac{2}{3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \quad (2)$$

Le critère de plasticité étant noté $f(p,q)$, l'expression précédente de la dissipation intrinsèque conduit, en supposant que la loi d'écoulement est associée, à caractériser le régime d'écoulement plastique par une loi de la forme (voir par exemple Wood, 1990) :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_d^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (4)$$

où $\dot{\lambda}$ désigne le multiplicateur plastique, dont la valeur est calculée à l'aide de la condition de cohérence $\dot{f}=0$.

Dans le cas du modèle Cam-Clay modifié par exemple, on a :

$$f(p,q) = q^2 + M^2 p (p_c - p) \quad (5)$$

et le paramètre d'érouissage p_c est une fonction de l'indice des vides plastiques. Son évolution est souvent décrite par une loi exponentielle du type :

$$p_c = p_c^o \exp \left[\frac{1 + e_o}{\lambda - \kappa} \varepsilon_v^p \right] \quad (6)$$

où e_0 est l'indice des vides initiales et λ et κ les pentes des courbes $e - \ln p$ au cours d'un essai de compression isotrope. En pratique, le traitement numérique de l'intégration de la loi de comportement repose sur le calcul du module d'écroûissage H , défini par $H \dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$. La combinaison de la condition de cohérence $\dot{f}=0$, de la loi d'écoulement (3)-(4) et de la loi d'écroûissage (6) permet de montrer simplement que l'on a :

$$H = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c / \dot{\lambda} = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial f}{\partial p}$$

Note : dans le cadre de la programmation des modèles à composantes, dans la mesure où le potentiel plastique est a priori indépendant du critère, on aurait intérêt à utiliser la formulation plus générale suivante :

$$H = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c / \dot{\lambda} = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

15.6.2. Introduction de la déformation déviatorique dans la loi d'écroûissage

Le modèle Cam-Clay modifié permet de modéliser la rupture en cisaillement d'un échantillon de sol lors d'un essai non drainé à l'appareil triaxial. Lors d'un cisaillement en condition non drainée, le point (p,q) se déplace sur la surface de charge jusqu'à l'état critique ; l'échantillon se déforme ensuite à volume constant sous un état de contraintes constant. On ne peut pas appliquer une contrainte de cisaillement supérieure à une valeur maximale q_{\max} qu'on appelle « cohésion non drainée ».

Pour les valeurs courantes des paramètres du modèle, la taille du domaine élastique ne varie pratiquement pas au cours du cisaillement non drainé, et la cohésion non drainée se calcule simplement en fonction de la taille initiale p_c du domaine (c'est-à-dire de la pression de préconsolidation) : on trouve $q_{\max} \approx M p_c / 2$.

Pour certains matériaux, en particulier les sables lâches, on observe que le chemin de contraintes est plus complexe : après une première phase au cours de laquelle la contrainte moyenne diminue (dont on peut rendre compte avec une surface et une loi d'écroûissage du type de celles du modèle Cam-Clay), on observe une augmentation de la contrainte moyenne : le point de chargement remonte le long d'une courbe de rupture généralement quasiment linéaire.

Le modèle de Nova (1982) est l'un des modèles mis au point pour reproduire ce comportement. La surface de charge est différente de celle du modèle Cam-Clay, mais peut subir un écroûissage isotrope et sa taille dépend d'un paramètre analogue à la pression de préconsolidation p_c du modèle Cam-Clay. On ne discute pas ici l'intérêt de cette surface de charge, mais l'apport de la loi d'écroûissage proposée par Nova. Cette loi fait dépendre la taille de la surface de charge non seulement la partie volumique de la déformation plastique, mais aussi de la déformation plastique déviatorique. On a donc une relation du type :

$$p_c = p_c(\varepsilon_v^p, \varepsilon_d^p) = p_c^0 \exp[\alpha \varepsilon_v^p + \beta \varepsilon_d^p]$$

L'introduction de ce type de loi d'écroûissage dans le modèle Cam-Clay modifié permet d'obtenir, qualitativement, un chemin de contraintes non drainé qui présente un changement de direction : la contrainte moyenne diminue dans un premier temps puis augmente. Pour la mise en œuvre pratique de cette loi dans un code de calcul, il est commode d'établir l'expression du module d'écroûissage H :

$$H \dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_d^p} \dot{\varepsilon}_d^p \right\} \rightarrow H = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_d^p} \frac{\partial f}{\partial q} \right\}$$

Dans le cas du modèle Cam-Clay modifié, on obtient :

$$H = M^2 p \left\{ M^2 (2p-p_c) \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} + 2q \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_d^p} \right\} \quad (7)$$

15.6.3. Première tentative d'extension au cas tridimensionnel

Les développements précédents se placent dans le cadre de l'essai triaxial :

- deux des contraintes sont égales ;
- les directions principales des contraintes et des déformations n'évoluent pas.

Pour appliquer le modèle à l'étude d'un ouvrage réel, il est nécessaire de proposer une formulation générale, utilisable lorsque les contraintes principales et les directions principales du tenseur des contraintes sont quelconques. On conserve les expressions de p et q données plus haut. Il est raisonnable d'adopter pour ε_v^p la définition suivante :

$$\varepsilon_v^p = - \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

Il est intéressant de noter que l'on ne peut pas factoriser q dans $\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - p \dot{\varepsilon}_v^p$; autrement dit, on ne peut pas mettre la dissipation intrinsèque sous la forme (1) :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \neq p \dot{\varepsilon}_v^p + q \dot{\varepsilon}_d^p$$

En supposant que le potentiel d'écoulement est une fonction de p et q, on obtient :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \left[\frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] = \dot{\lambda} \left[-1/3 \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial p} \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial q} 3\underline{\underline{s}}/2q \right]$$

Il reste à expliciter la loi d'écrouissage et le calcul du module d'écrouissage. On désigne par $\underline{\underline{\varepsilon}}_d$ le déviateur du tenseur des déformations plastiques, défini en généralisant l'expression (2) suivant :

$$\varepsilon_d^p = \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d \right)^{1/2} \quad (8)$$

Cette définition permet de retrouver la valeur voulue dans le contexte de l'essai triaxial. Pour le calcul du module d'écrouissage, on obtient :

$$H \dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_d^p} \dot{\varepsilon}_d^p \right\}$$

Il est facile de voir que :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = - \text{tr } \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = - \dot{\lambda} \text{tr } \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial p}$$

$$2 \varepsilon_d^p \dot{\varepsilon}_d^p = \frac{4}{3} \underline{\underline{\varepsilon}}_d^p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_d^p$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_d^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial q} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

ce qui donne finalement pour le module d'écrouissage :

$$H = - \frac{\partial f}{\partial p_c} \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial p} + \frac{2 \partial p_c}{3 \partial \varepsilon_d^p} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial q} \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} / \varepsilon_d^p \right\}$$

ou encore, compte tenu du fait que $2 q \frac{\partial \underline{\underline{g}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = 3 \underline{\underline{s}}$

$$H = -\frac{\partial f}{\partial p_c} \left\{ \frac{\partial p_c \partial g}{\partial \varepsilon_v^p \partial p} + \frac{\partial p_c \partial g \underline{\underline{\varepsilon}}_d^p : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\partial \varepsilon_p^p \partial q \varepsilon_d^p} \right\}$$

Dans le cas du critère du modèle de Cam-Clay modifié et pour une loi d'écoulement associée, on trouve donc :

$$H = M^2 p \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} M^2 (2p-p_c) + 2 \frac{\partial p_c \underline{\underline{\varepsilon}}_d^p : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\partial \varepsilon_p^p \varepsilon_d^p} \right\} \quad (9)$$

Dans le cas où ε_d^p est nul, cette expression devient :

$$H = M^2 p \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_v^p} M^2 (2p-p_c) + \frac{\partial p_c}{\partial \varepsilon_p^p} \sqrt{\frac{2}{3} \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right]_d : \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right]_d} \right\}$$

Dans le contexte de l'essai triaxial, la formule (9) coïncide avec (7). En revanche, si l'on a accumulé une déformation plastique déviatorique $\underline{\underline{\varepsilon}}_d^p$ sur un chemin de contrainte donné, puis déchargé le matériau, on obtient, lors d'un rechargement suivant des directions différentes des résultats différents selon que l'on utilise l'une ou l'autre des formules (7) et (9) pour calculer le module d'écrouissage.

Plus précisément, lorsque les directions des contraintes principales tournent, avec la formule (9), un élément de sol qui a subi des déformations plastiques et qui a été déchargé donne des réponses différentes selon les directions dans lesquelles on le sollicite, ce qui constitue une forme (sommaire) d'anisotropie induite (il y a une information stockée dans les directions principales de $\underline{\underline{\varepsilon}}_d^p$). La surface de charge reste isotrope, et les incréments de déformation plastique restent coaxiaux avec l'état de contrainte. En revanche, on modifie le calcul du module d'écrouissage, donc la raideur apparente (tangente) du sol lors du rechargement en régime plastique. Le choix de faire figurer parmi les variables de la loi d'écrouissage la déformation déviatorique plastique définie par (8) donne donc au modèle des propriétés peu souhaitables. La formulation (7) est meilleure, dans la mesure où elle ne fait pas apparaître d'anisotropie mal contrôlée. Elle sera préférée, bien qu'elle présente l'inconvénient suivant : si l'on définit ε_d^p par :

$$\varepsilon_d^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial q}$$

on ne sait pas relier ε_d^p au tenseur des déformations plastiques ou à ses variations.

15.6.4. Autres choix des variables de la loi d'écrouissage

Différents auteurs (notamment Shao et Desai (2000)) proposent d'utiliser au lieu d'autres variables que ε_v^p et ε_d^p dans la loi d'écrouissage :

$$p_c = p_c(\xi_v, \xi_d)$$

où l'évolution des variables ξ_v et ξ_d dépend des variations du tenseur des déformations plastiques.

On a par exemple :

$$\xi_d^p = \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{\varepsilon}}_d^p : \underline{\underline{\varepsilon}}_d^p \right)^{1/2}$$

Compte tenu de la loi d'écoulement, on trouve :

$$\begin{aligned} \xi_d^p &= \lambda \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} - \frac{1}{3} \text{tr} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \underline{\underline{\underline{1}}} \right] \\ \dot{\xi}_d^p &= \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right]_d : \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right]_d} = \lambda \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} : \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} - \frac{1}{3} \left(\text{tr} \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} \right)^2 \right\}} \quad (10) \end{aligned}$$

Cette formulation ne présente pas l'inconvénient de la formule (9) : la variation de $\dot{\xi}_d^p$ ne dépend pas de l'orientation des directions principales de $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$. Pour la partie volumique des déformations plastiques, Shao et

Desai (2000) proposent une formulation qui évite qu'une augmentation de volume plastique se traduise par un écrouissage de la surface de charge :

$$\dot{\xi}_v^p = \text{Max} \left(0, -\frac{1}{3} \text{tr} \dot{\underline{\underline{\xi}}}^p \right) = \dot{\lambda} \text{Max} \left(0, -\frac{1}{3} \text{tr} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)$$

ce qui permet d'exprimer le module d'érouissage :

$$H = -\frac{\partial f}{\partial p_c} \left\{ \frac{\partial p_c}{\partial \xi_v^p} \text{Max} \left(0, -\frac{1}{3} \text{tr} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) + \frac{\partial p_c}{\partial \xi_d^p} \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{1}{3} \left(\text{tr} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)^2 \right\}} \right\}$$

15.6.5. Conclusion

Il est peu courant d'utiliser la surface de charge du modèle Cam-Clay modifié pour la modélisation de sables lâches, même en adaptant la loi d'érouissage, parce que la partie « frottante » du critère ($q/p > M$), ne représente pas bien leur comportement. Les considérations précédentes restent valides pour des modèles utilisant une surface de charge différente, avec une partie frottante plus représentative (comme les modèles de Nova (1982), de Desai et al (1980), de Bigoni et Piccolroaz ou de Menetrey et Willam) : si l'on veut prendre en compte une contribution de la partie déviatorique de la déformation plastique, il faut choisir la variable proposée (10) par Shao et Desai (2000).



🌐 www.cesar-lcpc.com
✉ cesar-lcpc@itech-soft.com
☎ +33 (0)1 49 76 12 59

14-20 Boulevard Newton
Cité Descartes, Champs sur Marne
F-77447 Marne la Vallée Cedex 2
www.ifsttar.fr